Curvas Paramétricas

Isabel Harb Manssour
Márcio Sarroglia Pinho

Introdução

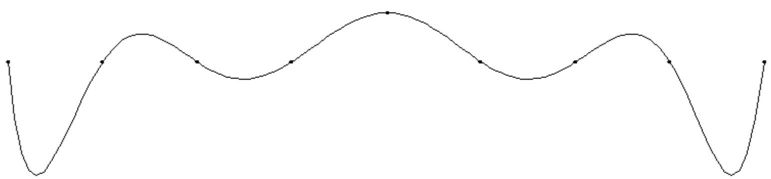
- Várias aplicações necessitam trabalhar com curvas suaves
  - *Design* de automóveis, aviões, navios, ...
  - Manipulação de câmera
- *Free Form Objects*
  - Forma variada e de difícil descrição
- Nestes casos, utilizam-se Curvas Paramétricas

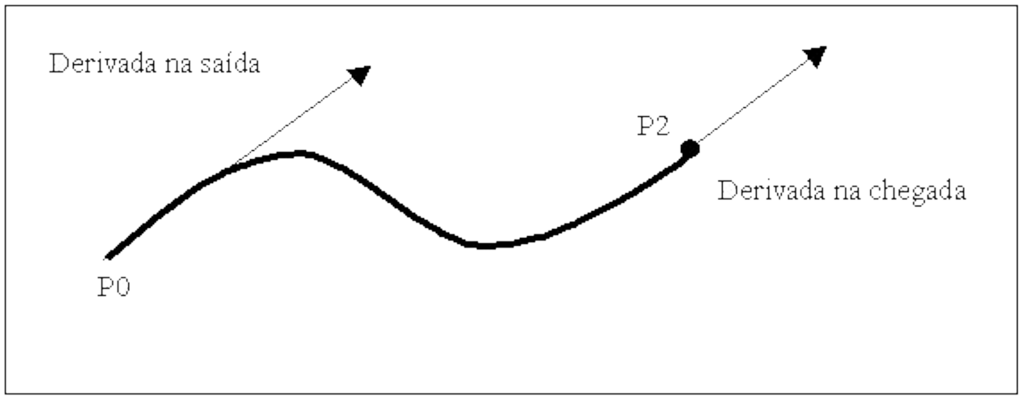
Representação de Curvas

- Formas de representar curvas
  - **Não paramétrica**
  - **Paramétrica**
- Forma não paramétrica
  - Uma das coordenadas é obtida em função da outra
  - $y = F(x)$, ou
  - $x = F(y)$

Representação de Curvas

- Forma não paramétrica
  - Problemas (para trabalhar com modelagem geométrica)
    - Difícil manipular interativamente
    - Difícil definir a equação de uma curva através de seus pontos e de suas derivadas nestes pontos (o que é útil na modelagem geométrica)



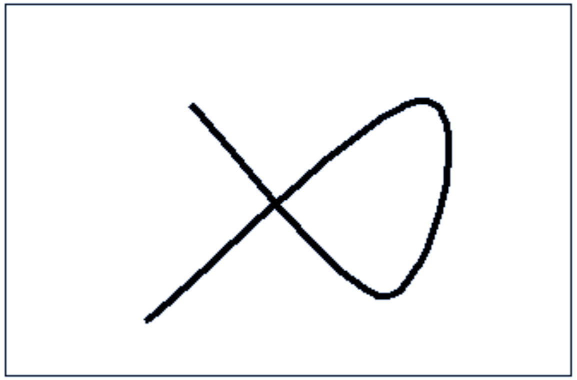


Polinômio de Lagrange

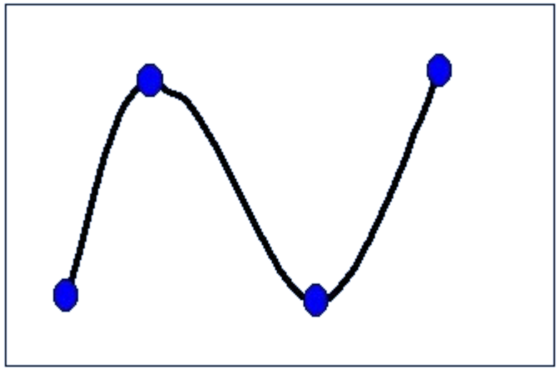
http://www.math.ucla.edu/~baker/java/hoefer/Lagrange.htm

Representação de Curvas

- Forma não paramétrica
  - Problemas (para trabalhar com modelagem geométrica)
    - Impossível criar curvas com laços



    - Difícil obter uma curva suave que passe por um conjunto de pontos



Representação de Curvas

- Forma paramétrica
  - Solução para os problemas de trabalhar com modelagem geométrica encontrados na forma não paramétrica
  - Aproximação por polinômios que definem partes da curva
  - Comportamento da curva em relação a cada um dos eixos é definida por uma equação independente
  - Neste caso, as coordenadas são obtidas em função de um parâmetro t
    - $x = f(t)$
    - $y = f(t)$

Curvas Paramétricas

- Estudaremos quatro maneiras diferentes de definir uma curva paramétrica
  - Bèzier
  - Hermite
  - B-Spline
  - Catmull-Rom

Curva Bèzier

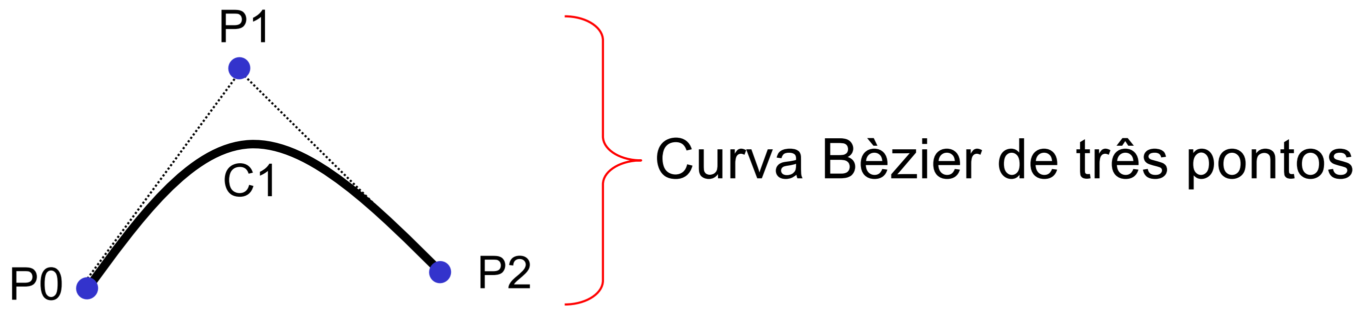
- Definida por quatro pontos de controle (a curva passa pelos pontos extremos)

- Vetores tangentes dos pontos finais são determinados a partir dos segmentos de reta
  - $\overrightarrow{P1P2}$ e $\overrightarrow{P3P4}$

- Parte-se da equação paramétrica da reta
  - Consiste em uma média ponderada
  - $P(t) = (1 - t) * P0 + t * P1$
    - $(1 - t)$ é o “peso” de P0
    - t é o “peso” de P1

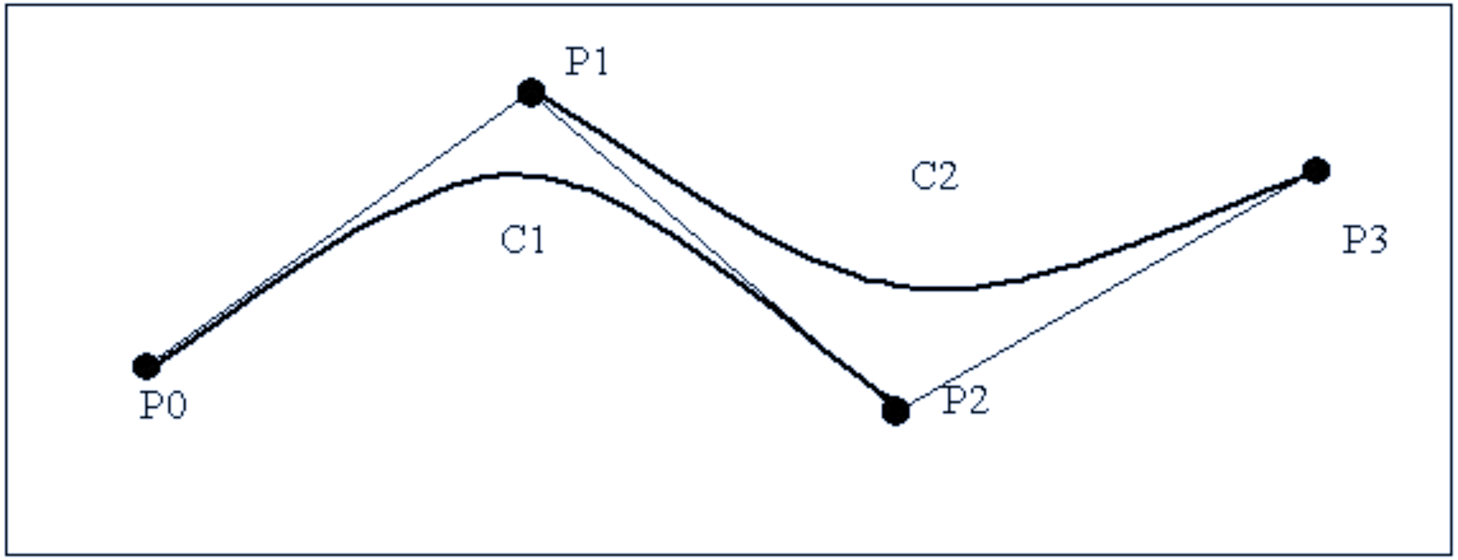
Curva Bèzier

- Ponderação de três pontos para gerar uma curva
  - Considera-se duas retas R1 e R2, respectivamente, entre P0 e P1 e entre P1 e P2
  - Representando na forma paramétrica é possível obter uma curva P0-P1-P2 fazendo simplesmente a ponderação entre R1 e R2 usando os pesos "*t*" e "*1 - t*"
    - $R1: (1 - t) * P0 + t * P1$
    - $R2: (1 - t) * P1 + t * P2$
    - $C1: (1-t)*R1 + t*R2 \rightarrow C1(t) = (1-t)^2 * P0 + 2 * (1-t) * t * P1 + t^2 * P2$



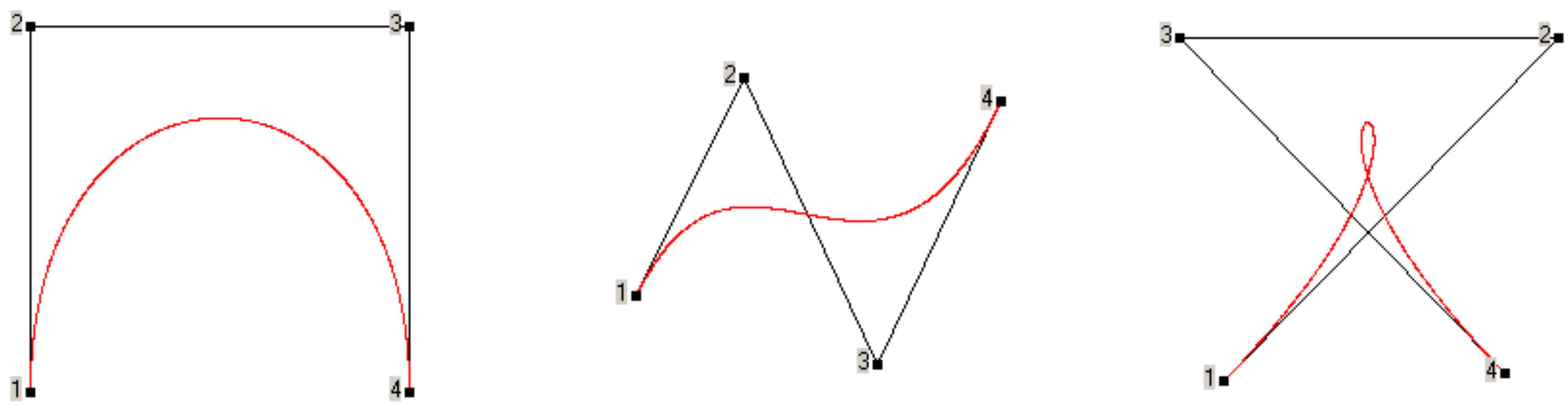
Curva Bèzier

- Curva Bèzier de quatro pontos
  - Ponderação de duas curvas
    - C1 ➔ (P0-P1-P2)
    - C2 ➔ (P1-P2-P3)
  - Desenvolvimento resulta em
    - $C3(t) = (1-t)^3 * P0 + 3 * t * (1-t)^2 * P1 + 3 * t^2 * (1-t) * P2 + t^3 * P3$



Curva Bèzier

- Curva Bèzier de quatro pontos
  - Os quatro pontos de controle definem um polígono convexo que delimita a curva Bèzier
  - Exemplos:



http://math.hws.edu/eck/cs424/notes2013/canvas/bezier.html

http://www.math.ucla.edu/~baker/java/hoefer/Bezier.htm

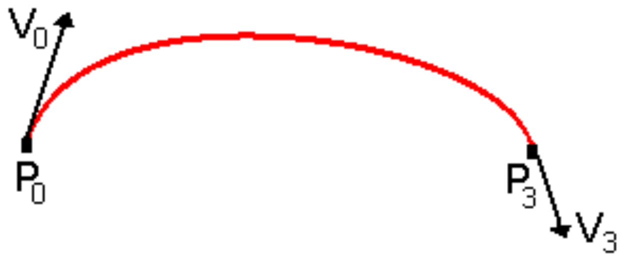
http://www.doc.ic.ac.uk/~dfg/AndysSplineTutorial/Beziers.html

Curva Bèzier

- Vantagens
  - Simplicidade de construção
  - Não precisa conhecer os vetores tangentes
- Desvantagens
  - Não garante a continuidade entre os segmentos de curva automaticamente
    - Os dois últimos pontos do primeiro segmento e os dois primeiros pontos do segundo segmento devem ser colineares
  - Não possui a propriedade do controle local

Curva Hermite

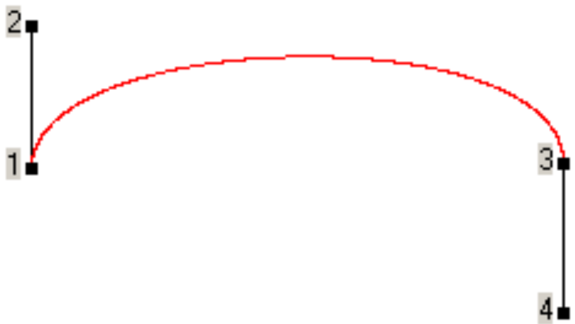
- Definida por dois pontos de controle, P_0 e P_3, e dois vetores tangentes V_0 e V_3 (derivadas nos pontos)
- A curva passa pelos pontos de controle
- Para criar uma curva P(t)
  - $0 \le t \le 1$
  - Extremos: pontos P_0 e P_3
  - Derivadas: vetores V_0 e V_3

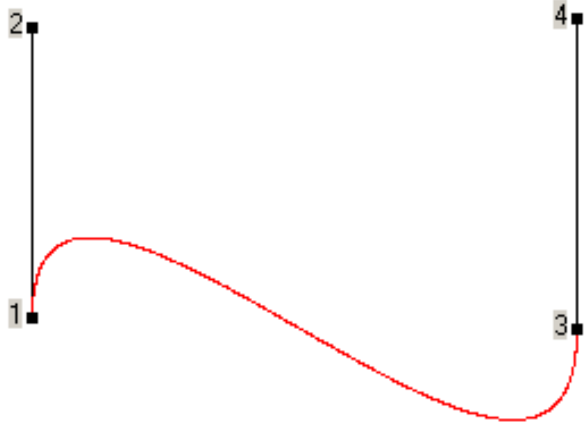


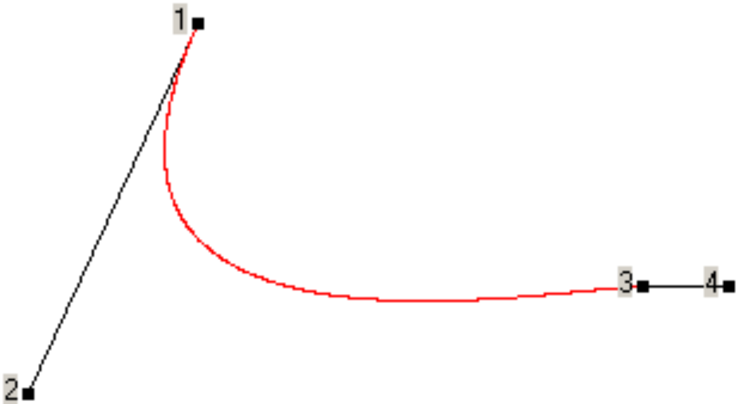
$$
\begin{aligned}
p(t) = {} & P(0) * (2t^3 - 3t^2 + 1) + \\
& P(1) * (-2t^3 - 3t^2) \\
& P'(0) * (t^3 - 2t^2 + t) \\
& P'(1) * (t^3 - t^2)
\end{aligned}
$$

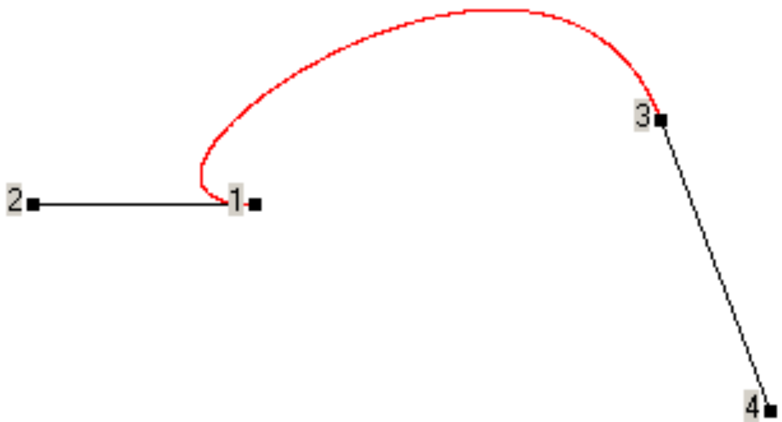
Curva Hermite

- Exemplos









Curva Hermite

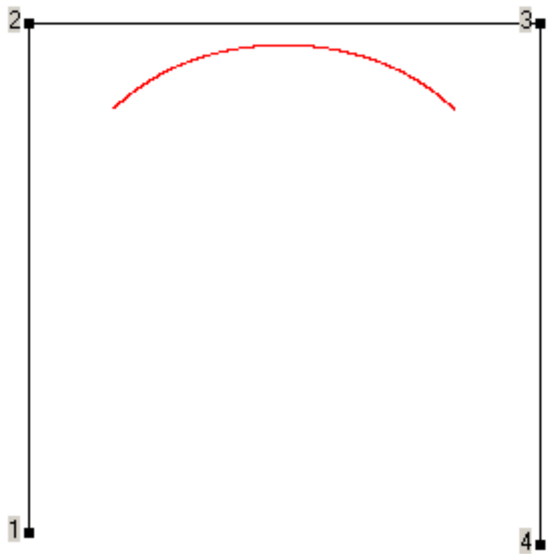
- Vantagens
  - Simplicidade de construção
  - Adequada para aplicações onde a inclinação dos vetores tangentes é importante
  - Curva interpola os pontos inicial e final
  - **A continuidade pode ser construída**
- Desvantagens
  - Não garante a continuidade entre os segmentos de curva **automaticamente**
    - Vetor de “chegada” do primeiro segmento deve ter a mesma direção e sentido do vetor de “partida” do segundo segmento

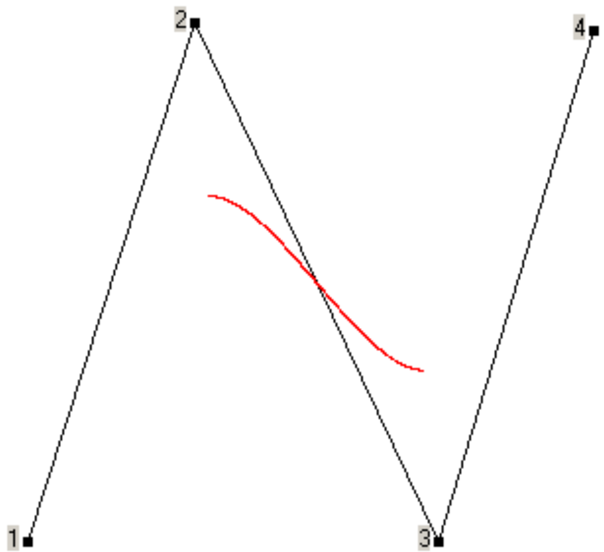
Curva B-Spline

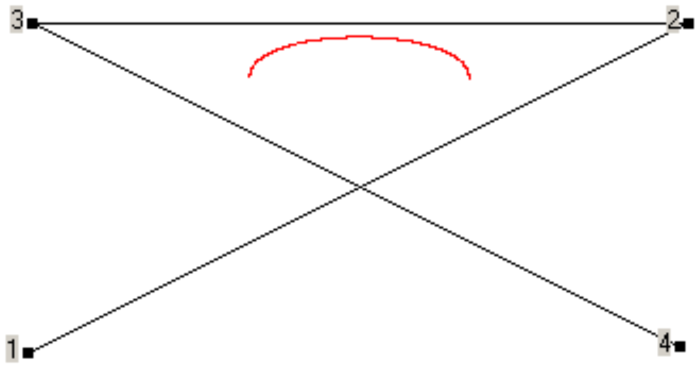
- *Spline*
  - Barra de metal longa e flexível usada para delinear cascos de navio, aviões, etc
- *Splines* consistem em curvas mais suaves e possuem continuidade de posição, inclinação/derivada e curvatura
- Representação *B-Spline*
  - Definida por quatro pontos de controle
  - A curva não passa por estes pontos

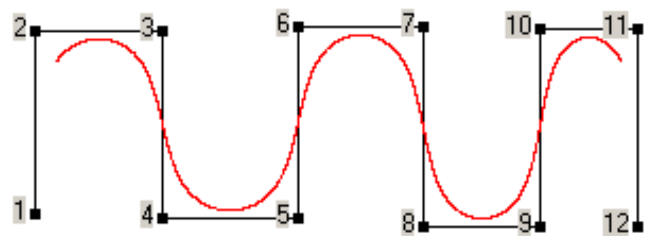
Curva B-Spline

- Exemplos









http://www.doc.ic.ac.uk/~dfg/AndysSplineTutorial/BSplines.html

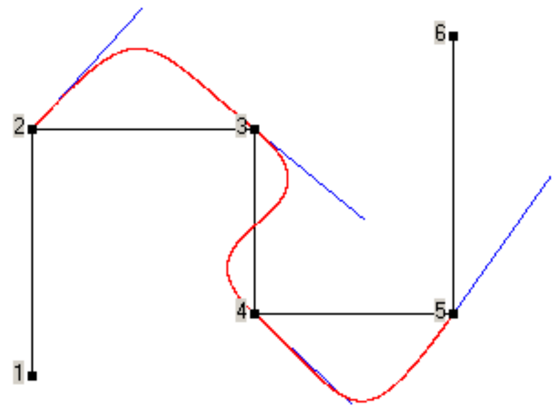
Curva B-Spline

- Vantagens
  - Simplicidade de construção
  - Continuidade garantida
  - Possui a propriedade do controle local nos pontos de controle
- Desvantagens
  - A curva não passa pelos pontos de controle

$$
\begin{aligned}
p(t) = \\
&[P0*(-t^3+3t^2-3t+1)+ \\
&P1*(3t^3-6t^2+4) \\
&P2*(-3t^3+3t^2+3t+1) \\
&P3*(t^3)]/6
\end{aligned}
$$

Curva Catmull-Rom

- Montada a partir de uma sequência de curvas Hermite
- Faz o cálculo das tangentes de forma automática a partir dos quatro pontos fornecidos pelo usuário
- Traça uma Hermite entre cada par de pontos
- A curva passa pelos pontos definidos pelo usuário (menos o primeiro e o último)



Fonte: Profa. Luciana Nedel

Curva Catmull-Rom

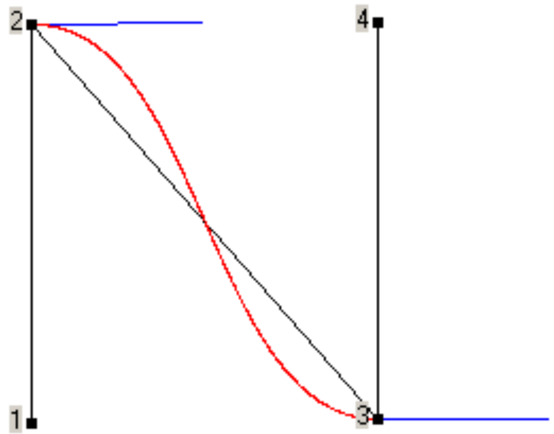
- Funcionamento
  - Tangente no ponto P_i é:

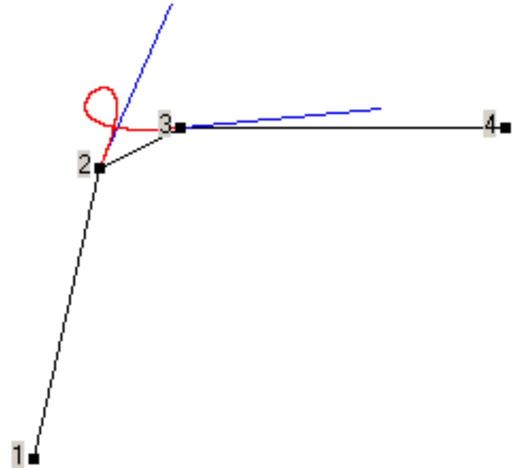
$$p_i = \frac{(p_i - p_{i-1}) + (p_{i+1} - p_i)}{2}$$

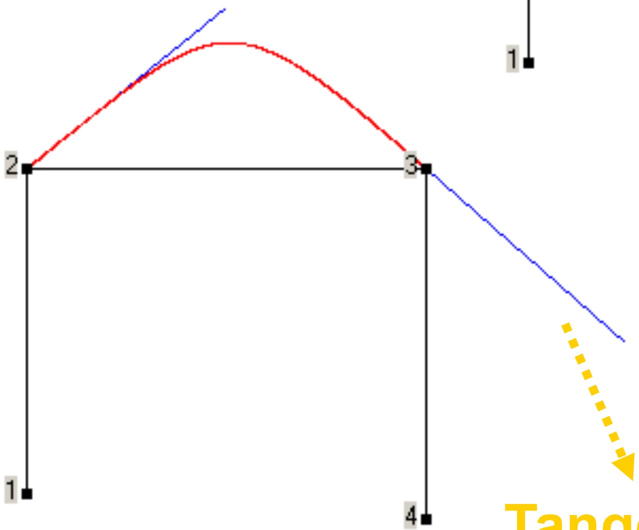
  - Impossível calcular para o primeiro e para o último ponto
    - Usa o valor mais próximo
    - Não considera estes pontos

Curva Catmull-Rom

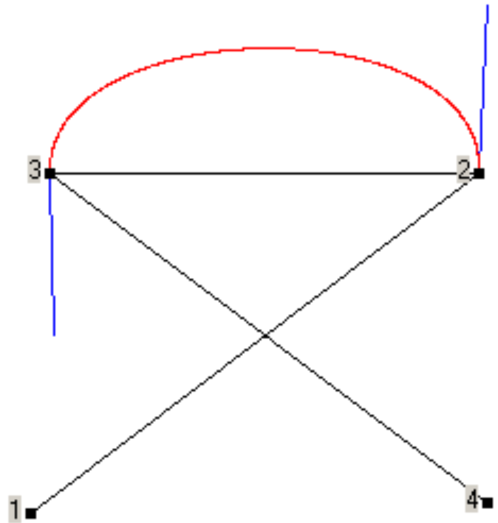
- Exemplos







Tangentes em cada ponto em azul



http://www.cse.unsw.edu.au/~lambert/splines/CatmullRom.html

Curva Catmull-Rom

- Vantagens
  - Continuidade garantida de forma automática
  - Possui a propriedade do controle local nos pontos de controle
  - A curva passa pelos pontos de controle (menos o primeiro e o último)

Referências

- PINHO, Márcio. S. **Curvas Paramétricas no Plano**. Disponível em http://www.inf.pucrs.br/~pinho/CG/Aulas/Curvas/Curvas.htm. Esta página também está disponível em http://www.inf.pucrs.br/~flash/cg/Aulas/Curvas/Curvas.htm.
- FOLEY, James D., et al. **Computer Graphics: Principles and Practice**. 2ª Ed., New York, Addison Wesley, 1990.
- HEARN, Donald; BAKER, M. Pauline. **Computer Graphics - C Version**. 2nd Ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1997, 652 p.