Fundamentos Matemáticos para Computação Gráfica

Márcio Sarroglia Pinho

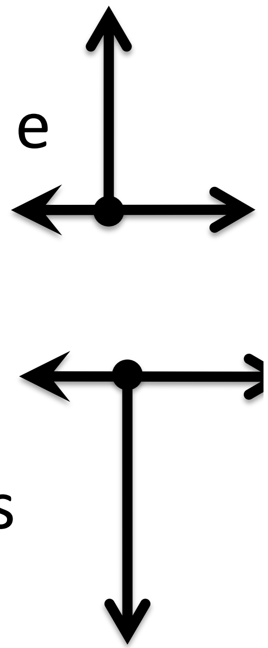
PUCRS
ESCOLA POLITÉCNICA

grv virtual reality group
porto alegre - brazil
http://grv.inf.pucrs.br

PONTOS, VETORES, RETAS, ETC...

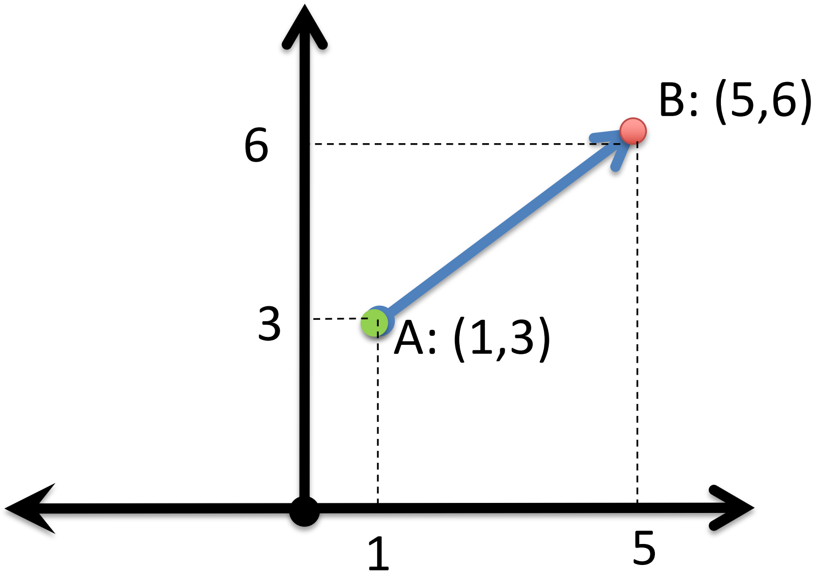
Pontos

- As **coordenadas** de um ponto identificam uma **posição individual** no plano ou no espaço
- No caso 2D, existe um eixo horizontal é chamado de **Eixo X** e um vertical, de **Eixo Y**
- A intersecção dos eixos define a **origem** do sistema
- As **coordenadas** informam as distâncias entre o ponto e a origem do sistema, medidas ao longo de cada um dos eixos



Vetores

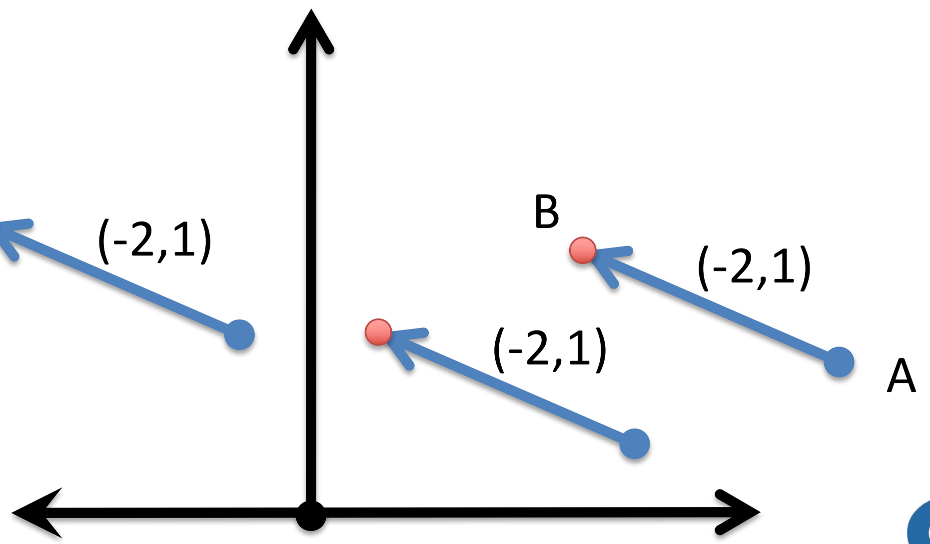
- V = B-A



A: (1,3)
B: (5,6)
V = (5,6)-(1,3)
V = (4,3)

Vetores

- Definem uma direção
- Possuem um tamanho(módulo)
- Não tem origem



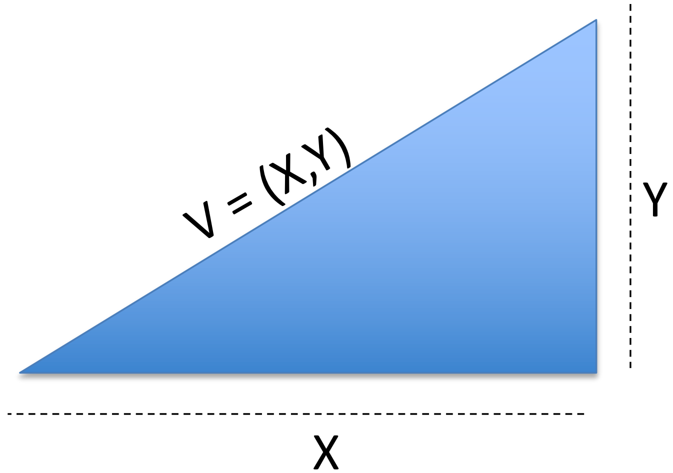
Vetores

- Operações
  - Módulo

$$|V| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

  - Versor (vetor unitário)

$$V = \frac{(x, y, z)}{|V|}$$



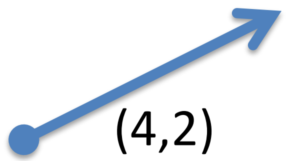
Vetores

- Operações
  - Multiplicação por um escalar
  - Permite alterar o tamanho do vetor e manter a direção

$$V(x,y,z) * n = (x * n, \quad y * n, \quad z * n)$$

(2,1)

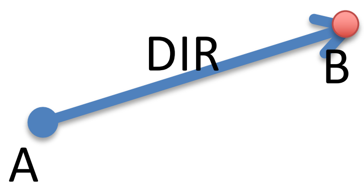
Multiplicando por 2 ...



(4,2)

Vetores

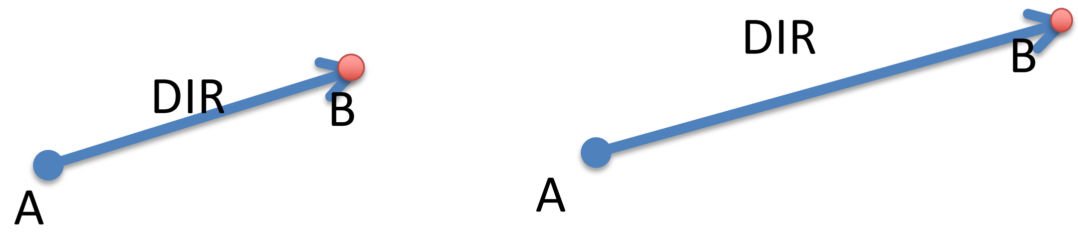
- Operações
  - A **soma** de um **vetor** a um **ponto** permite o deslocamento do ponto na direção do vetor



B = A + DIR

Vetores

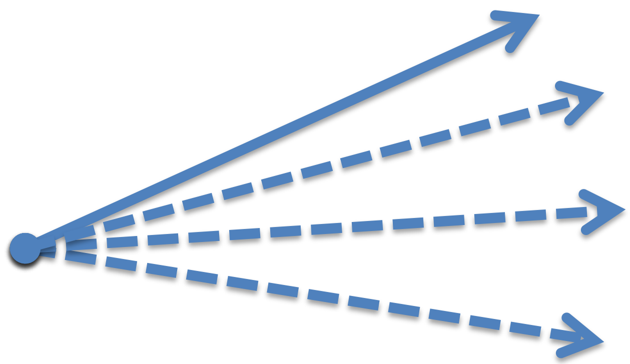
- Operações
  - O tamanho do vetor fornece a velocidade do movimento



B = A + (DIR * veloc)

Vetores

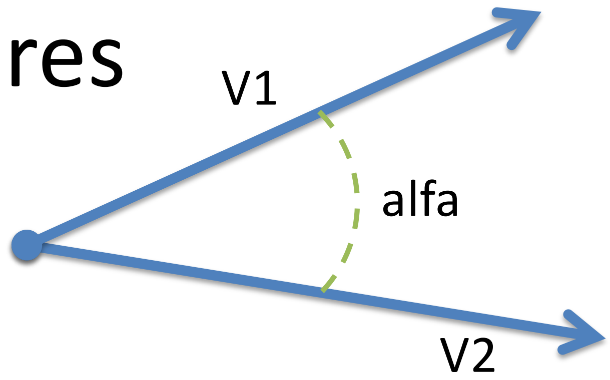
- Operações
  - A rotação permite a mudança de direção de um deslocamento



$$xr = x * \cos(alfa) - y * sen(alfa)$$

$$yr = x * sen(alfa) + y * \cos(alfa)$$

Vetores



- Operações
  - Produto Escalar
    - Tem este nome pois resulta em um número
    - Também conhecido como produto interno, *dot product, inner product*

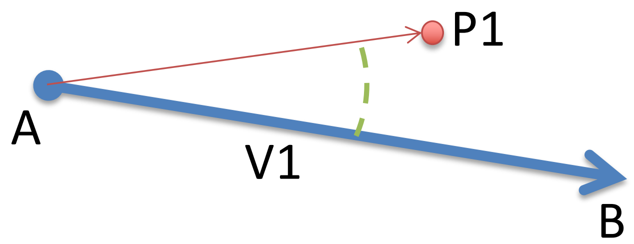
$$V1 \bullet V2 = x1 * x2 + y1 * y2 + z1 * z2$$

  - Pode ser usado para calcular o ângulo entre 2 vetores pois, se V1 e V2 são unitários, então

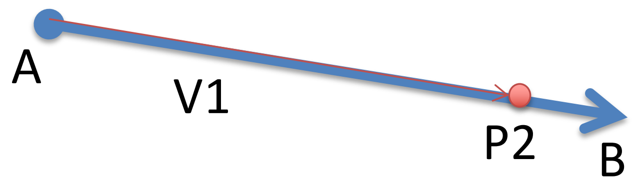
$$V1 \bullet V2 = \cos(\alpha)$$

Vetores

- Operações
  - Produto Escalar

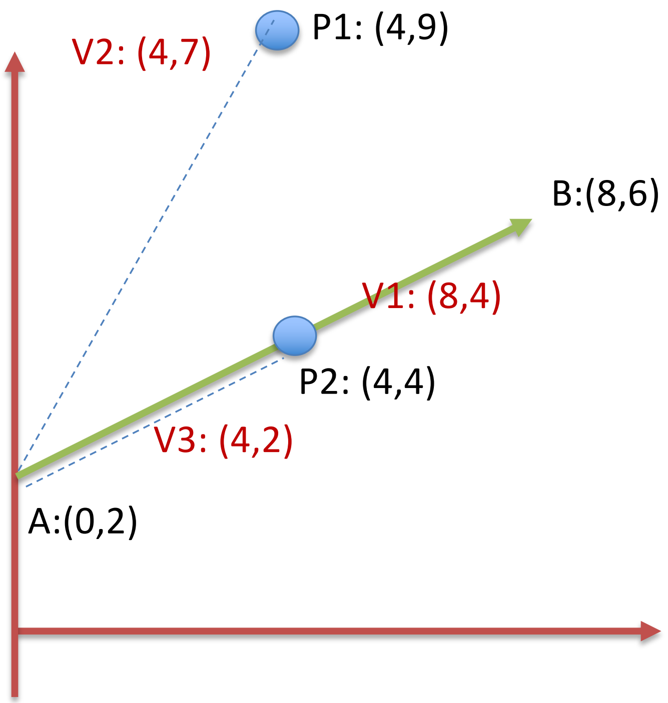


Ângulo > 0
Cos < 1



Ângulo == 0
Cos == 1

Exemplo de uso do Produto Escalar



Para o ponto P1

Módulo (V1): sqrt(64+16) : 8,94
Módulo (V2): sqrt(16+49): 8,06
V1.V2 = (8*4+4*7)/(8,94*8,06)
V1.V2 = 52/72,07
V1.V2 = 0,7214

Para o ponto P2

Módulo (V1): sqrt(64+16) : 8,94
Módulo (V3): sqrt(16+4): 4,47
V1.V3 = (8*4+4*2)/(8,94*4,47)
V1.V3 = 40/39,96
V1.V3 = 1,00095592

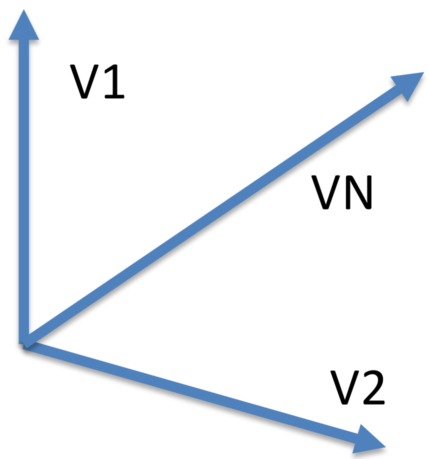
Conclusão:
Como o produto escalar V1.V3 resulta muito próximo de 1, então o Ponto P2 está sobre a reta A-B

ESCOLA POLITÉCNICA PUCRS

grv virtual reality group porto alegre - brazil http://grv.inf.pucrs.br

Vetores

- Operações
  - Produto Vetorial V1 X V2 = (Xn,Yn,Zn)
    - Produto Externo, *Cross product* ou *Outer product*
  - Vetor perpendicular a V1 e a V2



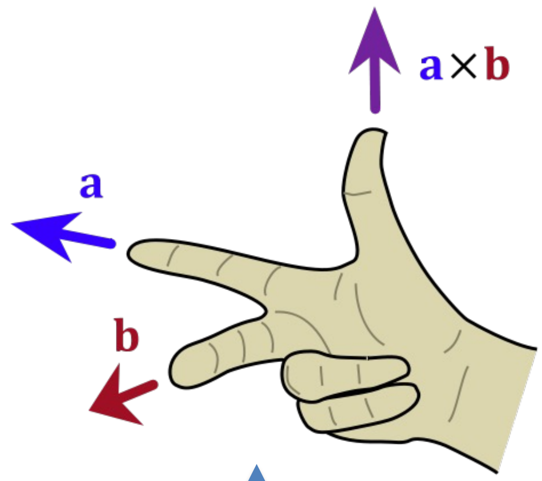
$$V1 \times V2 = \det\begin{bmatrix} Xn & Yn & Zn \\ X1 & Y1 & Z1 \\ X2 & Y2 & Z2 \end{bmatrix}$$

$$Xn = Y1 * Z2 - Z1 * Y2$$

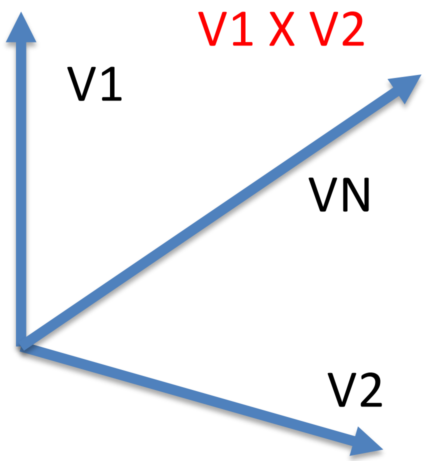
$$\mathrm{Yn} = Z1 * X2 - X1 * Z2$$

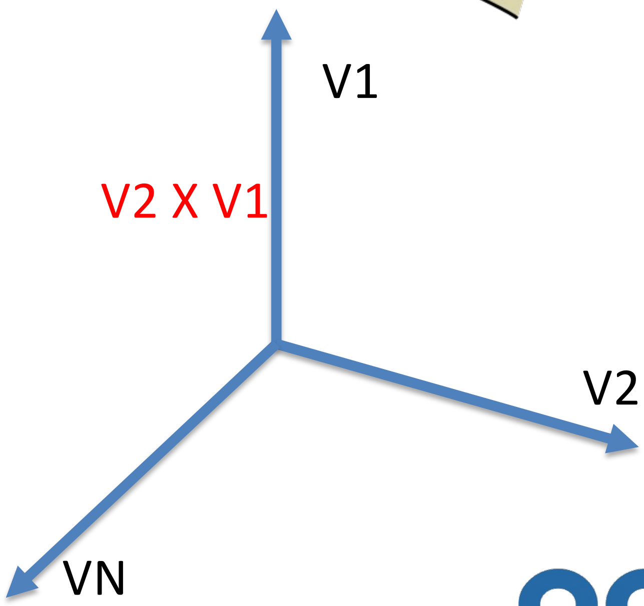
$$\mathrm{Zn} = X1 * Y2 - Y1 * X2$$

Vetores



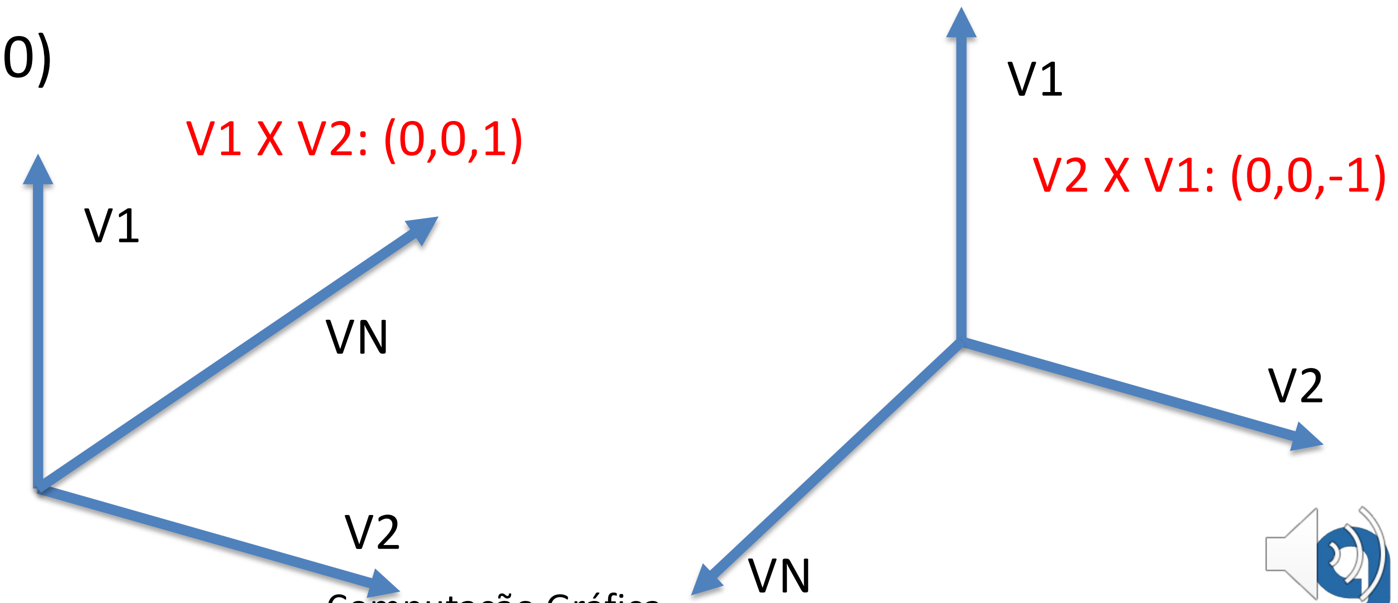
- Operações
  - Produto Vetorial
  - Regra da mão direita





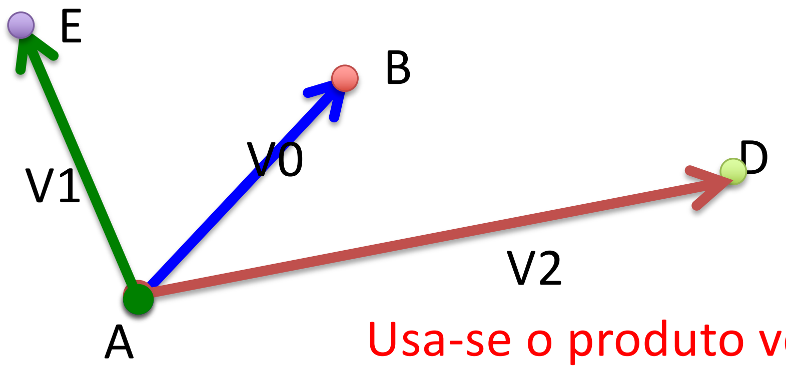
Vetores

- Operações
  - Produto Vetorial
  - V1: (0,1,0)
  - V2: (1,0,0)



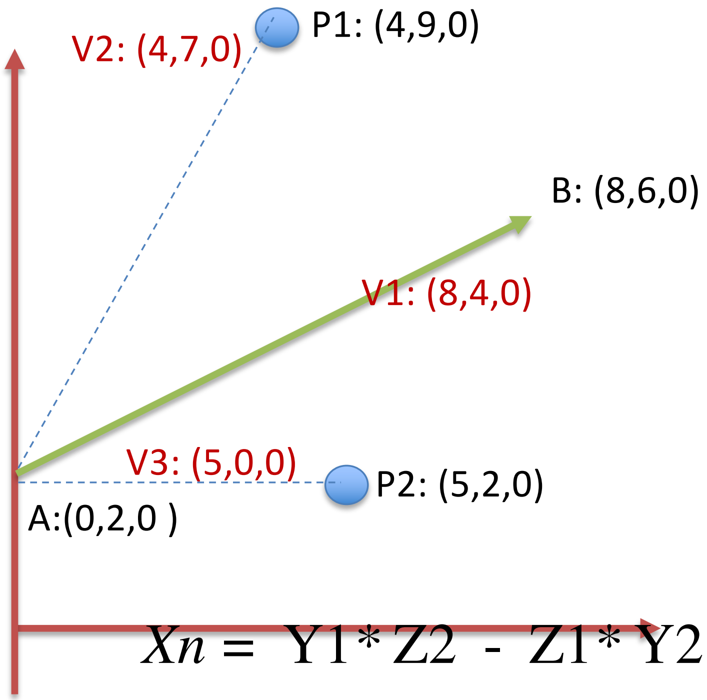
Vetores

- Determinação de lateralidade
- De que lado está o ponto em relação a AB



Usa-se o produto vetorial entre os vetores
V0 x V1
V0 x V2

Exemplo de uso do Produto Vetorial



$$Xn = Y1 * Z2 - Z1 * Y2$$

$$Yn = Z1 * X2 - X1 * Z2$$

$$Zn = X1 * Y2 - Y1 * X2$$

Para o ponto P1

V1 x V2: (0,0,Z1)
Z1: 8*7 - 4*4
Z1: 56-16
Z1: 40

Para o ponto P2

V1 x V3: (0,0,Z2)
Z2: 8*0 - 4*5
Z2: 0-20
Z2: -20

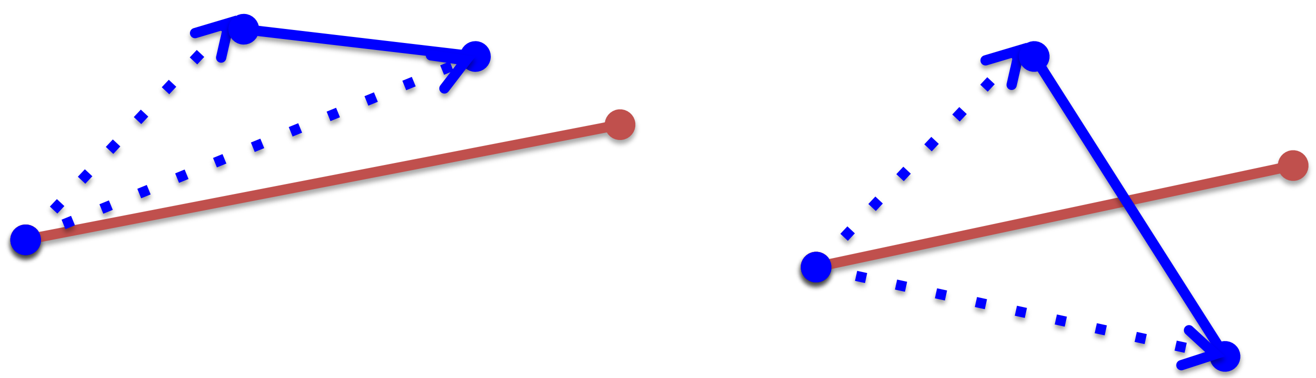
Conclusão:
Como o Z1 é positivo e o Z2 é negativo, então P1 está de um lado e P2 está de outro, em relação à reta A-B

ESCOLA POLITÉCNICA PUCRS

virtual reality group
porto alegre - brazil
http://grv.inf.pucrs.br

Vetores

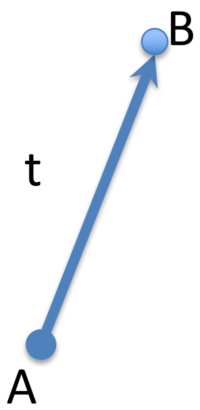
- Determinação de lateralidade
  - Útil para saber se pode haver intersecção entre segmentos de reta



RETAS

Retas

- Equação paramétrica da reta
  - Ponto Inicial + Vetor colocado no ponto
  - Utiliza-se a multiplicação do um vetor por um escalar para obter qualquer ponto da reta



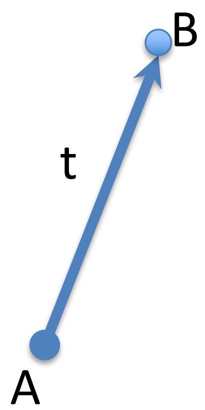
$$R(t) = A + (B - A) * t$$

$$R(t) = A + B * t - A * t$$

$$R(t) = A * (1 - t) + B * t \quad t \in [0..1]$$

Retas

- Equação paramétrica da reta



$R(t): A * (1-t) + B * t$

$R(0): A$

$R(1): B$

$R(0.5): A * 0.5 + B * 0.5$

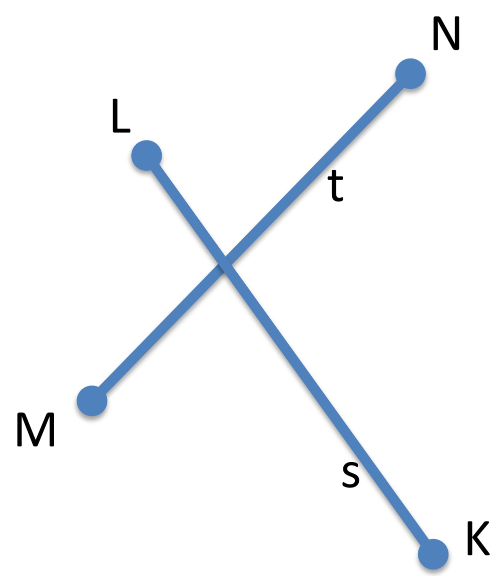
Retas

- Interseção entre retas

```
int intersec2d (Ponto k, Ponto l, Ponto m, Ponto n,
                double &s, double &t)
{
    double det = (n.x - m.x) * (l.y - k.y)  -  (n.y - m.y) * (l.x -
k.x);
    if (det == 0.0)  return 0 ; // não há intersecção
    s = ((n.x - m.x) * (m.y - k.y) - (n.y - m.y) * (m.x - k.x))/ det ;
    t = ((l.x - k.x) * (m.y - k.y) - (l.y - k.y) * (m.x - k.x))/ det ;
    return 1;  // há intersecção
}
```

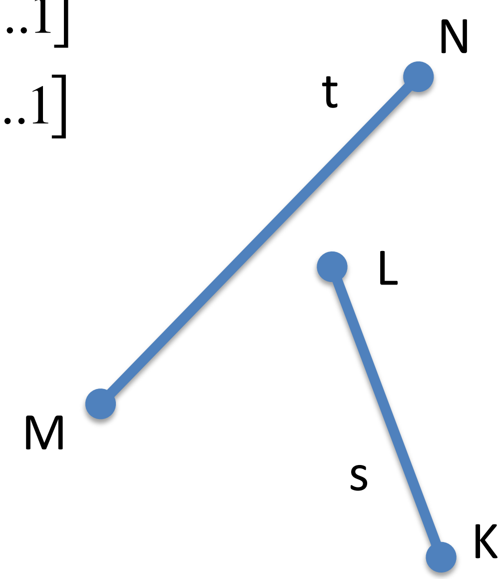
Retas

- Interseção entre retas



Condição para que haja interseção

$$s \in [0..1]$$
$$t \in [0..1]$$



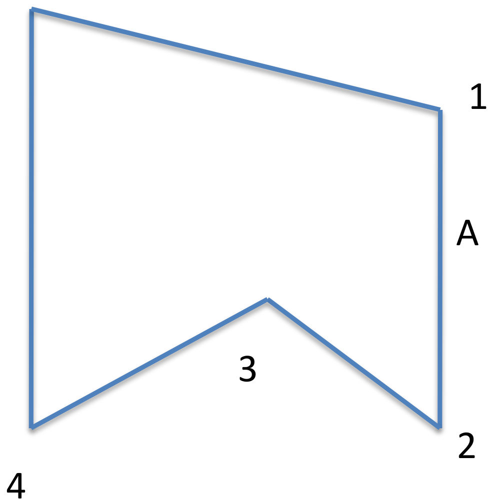
POLÍGONOS

ESCOLA
POLITÉCNICA
PUCRS

virtual
reality
group
porto alegre - brazil
http://grv.inf.pucrs.br

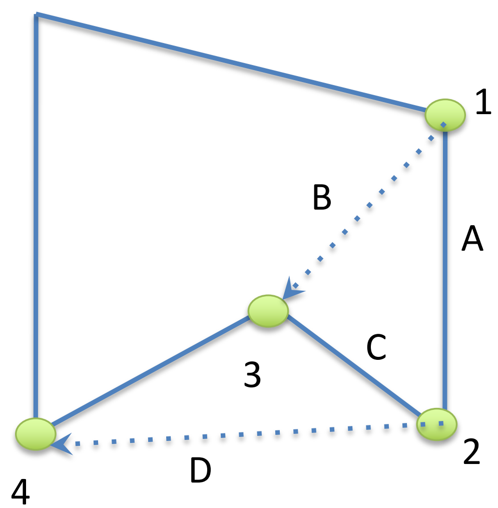
Polígonos

- Sequência de vértices



Polígonos

- Determinação de Concavidade



$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Z1 \end{pmatrix}$$

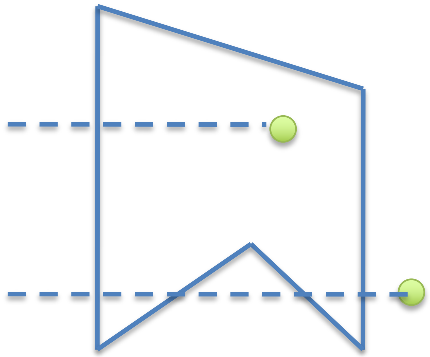
$$C \times D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Z2 \end{pmatrix}$$

$$Z1 > 0$$

$$Z2 < 0$$

Polígonos

- Determinação de Inclusão

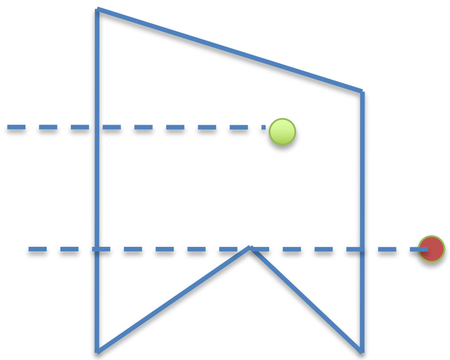


Polígonos Côncavos
Conta-se o número de intersecções

Par: fora
Ímpar: dentro

Polígonos

- Determinação de Inclusão

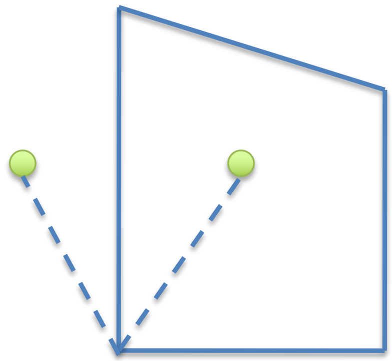


Pontos que têm o mesmo Y de vértices de **mínimo e máximo local**, deve contar **duas** intersecções

Mínimo/Máximo local tem Y maior ou menos que seus vizinhos

Polígonos

- Determinação de Inclusão



Convexos
Verifica-se de que lado está o ponto em relação a cada uma das arestas do polígono

Todos do mesmo lado: dentro

FIM