

CIRCUITOS DIGITAIS

ÁLGEBRA BOOLEANA

Definição

- **A álgebra de Booleana é um sistema matemático composto por operadores, regras, postulados e teoremas.**
- **A álgebra booleana usa funções e variáveis, como na álgebra convencional, que podem assumir apenas um dentre dois valores**
 - {Falso, Verdadeiro} - raciocínio humano
 - {Desligado, Ligado} - circuitos de chaveamento
 - {0, 1} - sistema binário
 - {0v, +5v} - eletrônica digital
- **A álgebra booleana trabalha com dois operadores, o operador AND, simbolizado por (\cdot) e o operador OR, simbolizado por ($+$).**
 - O operador AND é conhecido como produto lógico e o operador OR é conhecido como soma lógica
 - Os mesmos correspondem, respectivamente, às operações de interseção e união da teoria dos conjuntos.

Porta Lógica NÃO (NOT) ou Complemento

- Complementa o sinal de entrada. Se o sinal de entrada for 0 ela produz uma saída 1, se a entrada for 1 ela produz uma saída 0

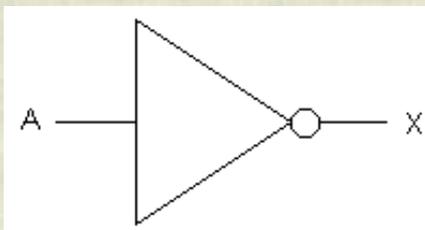
- Função Booleana

$$X = \bar{A}$$

- Tabela Verdade

A	X
0	1
1	0

- Representação gráfica



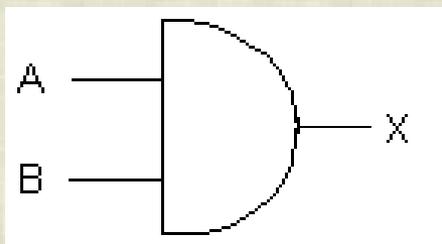
Porta Lógica E (AND)

- Combina sinais de entrada equivalentemente a um **circuito em série**. Produz uma saída 1, se todos os sinais de entrada forem 1. Senão produz 0
- Função Booleana
- Tabela Verdade

$$X = A \cdot B$$

A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Representação gráfica



Porta Lógica OU (OR)

- Combina dois ou mais sinais de entrada equivalentemente a um **circuito paralelo**. Produz uma saída 1, se qualquer um dos sinais de entrada for 1. Senão produz 0

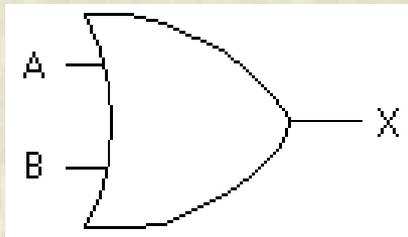
- Função Booleana

$$X = A + B$$

- Tabela Verdade

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Representação gráfica



Porta NÃO E (NAND)

- Equivale a uma porta AND seguida por uma porta NOT. Ela produz uma saída que é o inverso da saída produzida pela porta AND

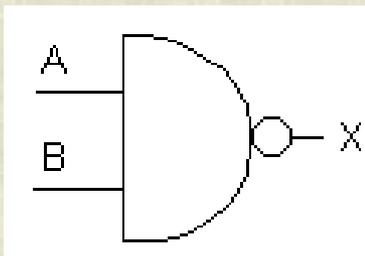
- **Função Booleana**

$$X = \overline{A \cdot B}$$

- **Tabela Verdade**

A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- **Representação gráfica**



Porta NÃO OU (NOR)

- Equivale a uma porta OR seguida por uma porta NOT. Ela produz uma saída que é o inverso da saída produzida pela porta OR

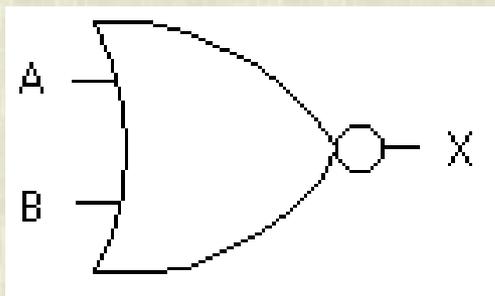
- **Função Booleana**

$$X = \overline{A + B}$$

- **Tabela Verdade**

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- **Representação gráfica**



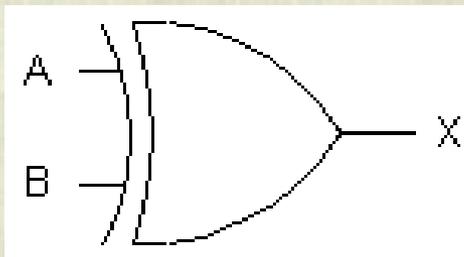
Porta OU Exclusivo (XOR)

- A porta XOR produz 0 na saída 0 quando todos os bits de entrada são iguais e saída 1 quando pelo menos um dos bits de entrada é diferente dos demais
 - Função Booleana
 - Tabela Verdade

$$X = A \oplus B$$

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Representação gráfica



Propriedades da Álgebra Booleana

- Postulados

$A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A$	$A + 1 = 1$	$A \cdot 1 = A$
$A + \bar{A} = 1$	$A \cdot \bar{A} = 0$	$A + A = A$	$A \cdot A = A$

- Propriedade Comutativa

$A + B = B + A$	$A \cdot B = B \cdot A$
-----------------	-------------------------

- Propriedade Associativa

$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(A \cdot B) \cdot C = (B \cdot C) \cdot A$
-----------------------------	---------------------------------------------

- Propriedade Distributiva

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

- Teorema de De Morgan

$\overline{A \cdot B \cdot C \dots} = \overline{A + B + C + \dots}$	$\overline{A + B + C + \dots} = \overline{A \cdot B \cdot C \dots}$
---------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------

Aplicação das Leis da Álgebra Booleana

- **Aplicando os postulados e leis da álgebra Booleana as funções Booleanas podem ser minimizadas**
 - O circuito equivalente pode ser menor
 - Variáveis de entrada podem ser eliminadas da função equivalente
- **Exemplos:**

$$\text{a) } S1 = X \cdot Y + X \cdot \bar{Y} \rightarrow X$$

$$\text{b) } S2 = X + X \cdot \bar{Y} \rightarrow X$$

$$\text{c) } S3 = \overline{(X + Y + \bar{Z}) \cdot (X + \bar{Y} + Z + \bar{W})} \cdot 0 \rightarrow 1$$

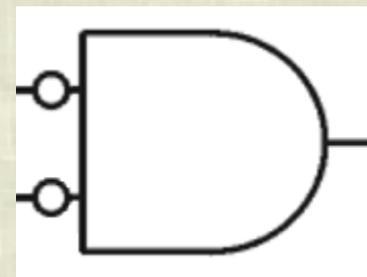
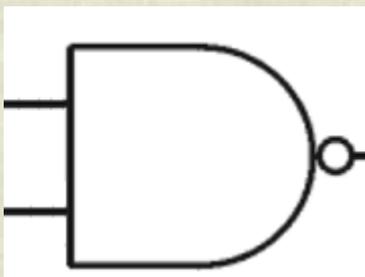
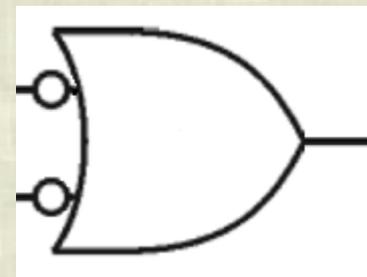
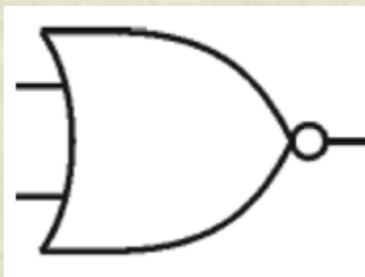
$$\text{d) } S4 = 1 + \overline{X \cdot Y \cdot Z + W \cdot Z + Z \cdot Y} \rightarrow 1$$

$$\text{e) } S5 = X \cdot Y + \overline{(X + \bar{Y}) \cdot (\bar{X} + Y)} \rightarrow X + Y$$

$$\text{f) } S6 = \overline{(\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}) \cdot (\bar{X} + \bar{Y} + Z) \cdot (\bar{X} + Y + \bar{Z}) \cdot (\bar{X} + Y + Z)} \rightarrow X$$

Operações diferentes / erros comuns

- Diferença entre os circuitos



Precedência das Operações

1 - ()

2 - NOT

3 - AND

4 - OR

Exemplos:

$A \cdot B + C'$

$(A \cdot B + C)'$

$A \cdot (B + C)'$

$A \cdot (B + C')$

Expressões Booleanas x Circuitos

$$A + B \cdot C'$$

Exercício: desenhar o circuito

Construção da tabela-verdade - considerar a precedência !

A	B	C	C'	B.C'	A+B.C'
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Efeito da Precedência das Operações

1 - ()

2 - NOT

3 - AND

4 - OR

Exemplos:

$$A \cdot B + C'$$

$$(A \cdot B + C)'$$

$$A \cdot (B + C)'$$

$$A \cdot (B + C')$$

A	B	C	C'	A.B	A.B+C'
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Efeito da Precedência das Operações

1 - ()

2 - NOT

3 - AND

4 - OR

Exemplos:

$A . B + C'$

$(A . B + C)'$

$A . (B + C)'$

$A . (B + C')$

A	B	C	A.B	A.B+C	(A.B+C)'
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Efeito da Precedência das Operações

1 - ()

2 - NOT

3 - AND

4 - OR

Exemplos:

$A \cdot B + C'$

$(A \cdot B + C)'$

$A \cdot (B + C)'$

$A \cdot (B + C)$

A	B	C	B+C	(B+C)'	A.(B+C)'
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Efeito da Precedência das Operações

1 - ()

2 - NOT

3 - AND

4 - OR

Exemplos:

$A . B + C'$

$(A . B + C)'$

$A . (B + C)'$

$A . (B + C')$

A	B	C	C'	B+C'	A.(B+C')
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Efeito da Precedência das Operações

- 1 - ()
- 2 - NOT
- 3 - AND
- 4 - OR

Comparando as saídas dos quatro circuitos:

Exemplos:

$$A \cdot B + C'$$

$$(A \cdot B + C)'$$

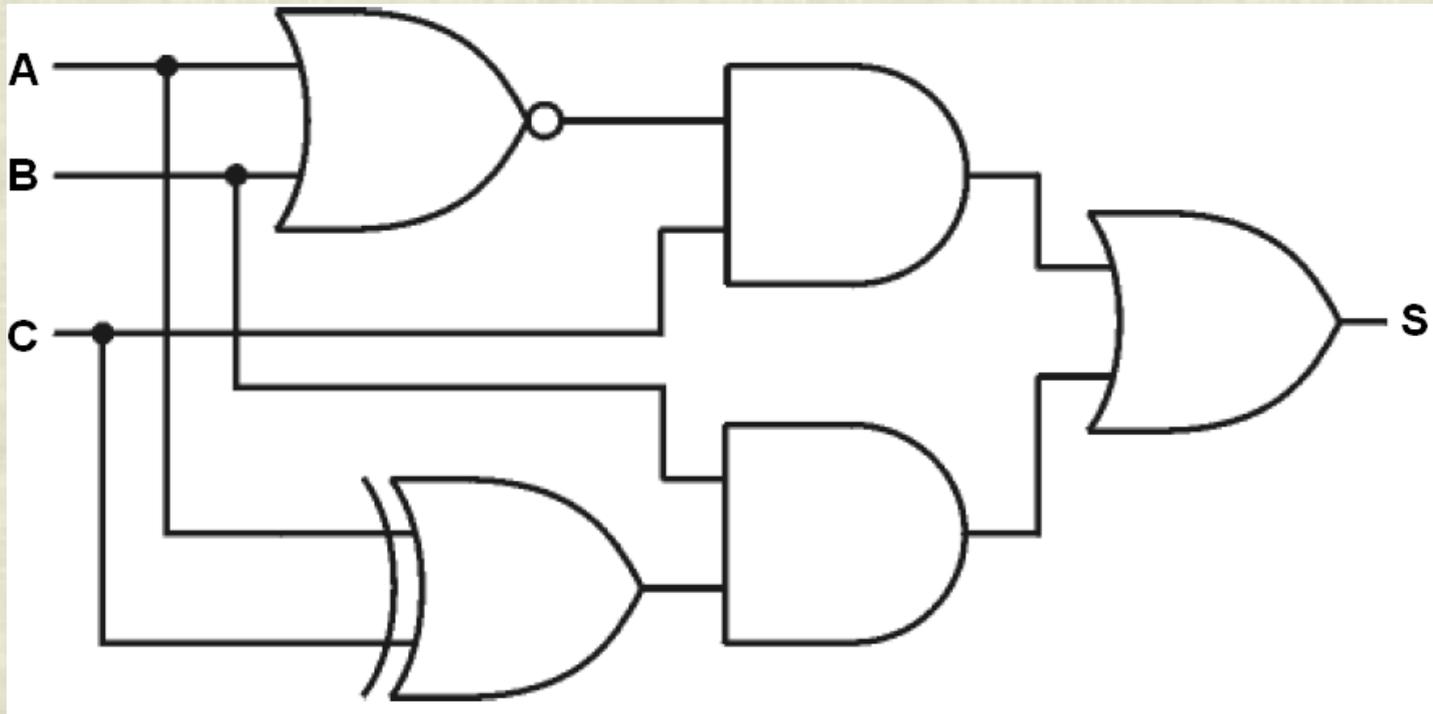
$$A \cdot (B + C)'$$

$$A \cdot (B + C')$$

A	B	C	$A \cdot B + C'$	$(A \cdot B + C)'$	$A \cdot (B + C)'$	$A \cdot (B + C')$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1

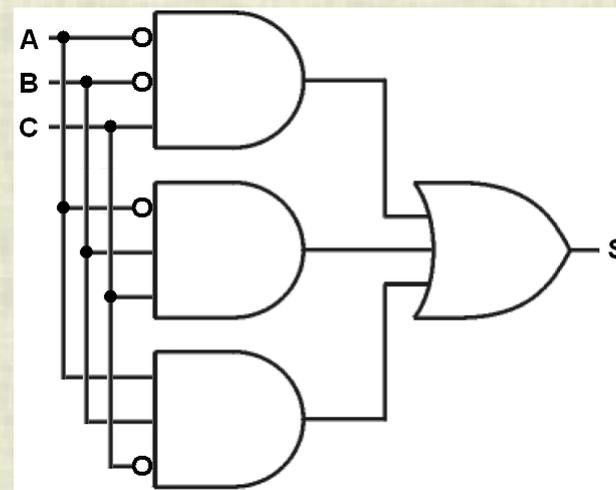
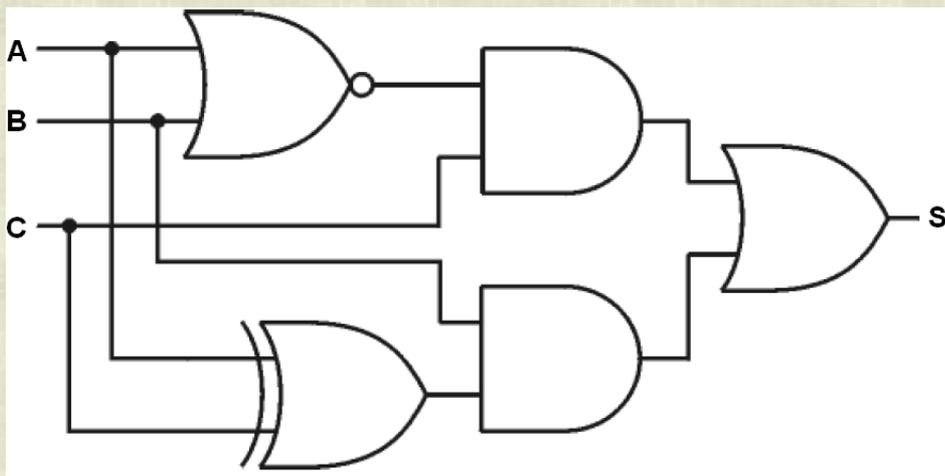
Extração da função booleana correspondente

- Dado o circuito abaixo, descreva com funções Booleanas cada porta



Circuitos com 1, 2 ou mais Níveis Lógicos

- **Existem infinitas possibilidades para implementar a mesma lógica combinacional, utilizando 1, 2 ou mais níveis de portas lógicas**
- **Lógica com 1 nível é aplicada apenas para circuitos muito simples**
 - A complexidade do circuito deve ser resolvida na própria porta
- **Lógica multinível aplicada a maior parte dos circuitos customizados**
- **Lógica 2 níveis aplicada normalmente aplicada a circuitos pré-fabricados e/ou regulares, tais como PLAs (matrizes lógicas programáveis)**
- **Exemplo de circuitos equivalentes implementados com 2 e 3 níveis de portas lógicas**



Obtenção de Funções Booleanas em 2 Níveis

- Uma mesma lógica Booleanas pode ser obtida por diversas funções diferentes, mas equivalentes, com diversos níveis de lógica
- Funções Booleanas em 2 níveis
 - Soma de produtos
 - lista as combinações das variáveis para as quais a função de saída vale 1
 - Produto de Somas
 - lista as combinações das variáveis para as quais a função de saída vale 0

Exemplo

X	Y	Z	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Soma de Produtos

$$S = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}Y\bar{Z} + X\bar{Y}Z + XYZ$$

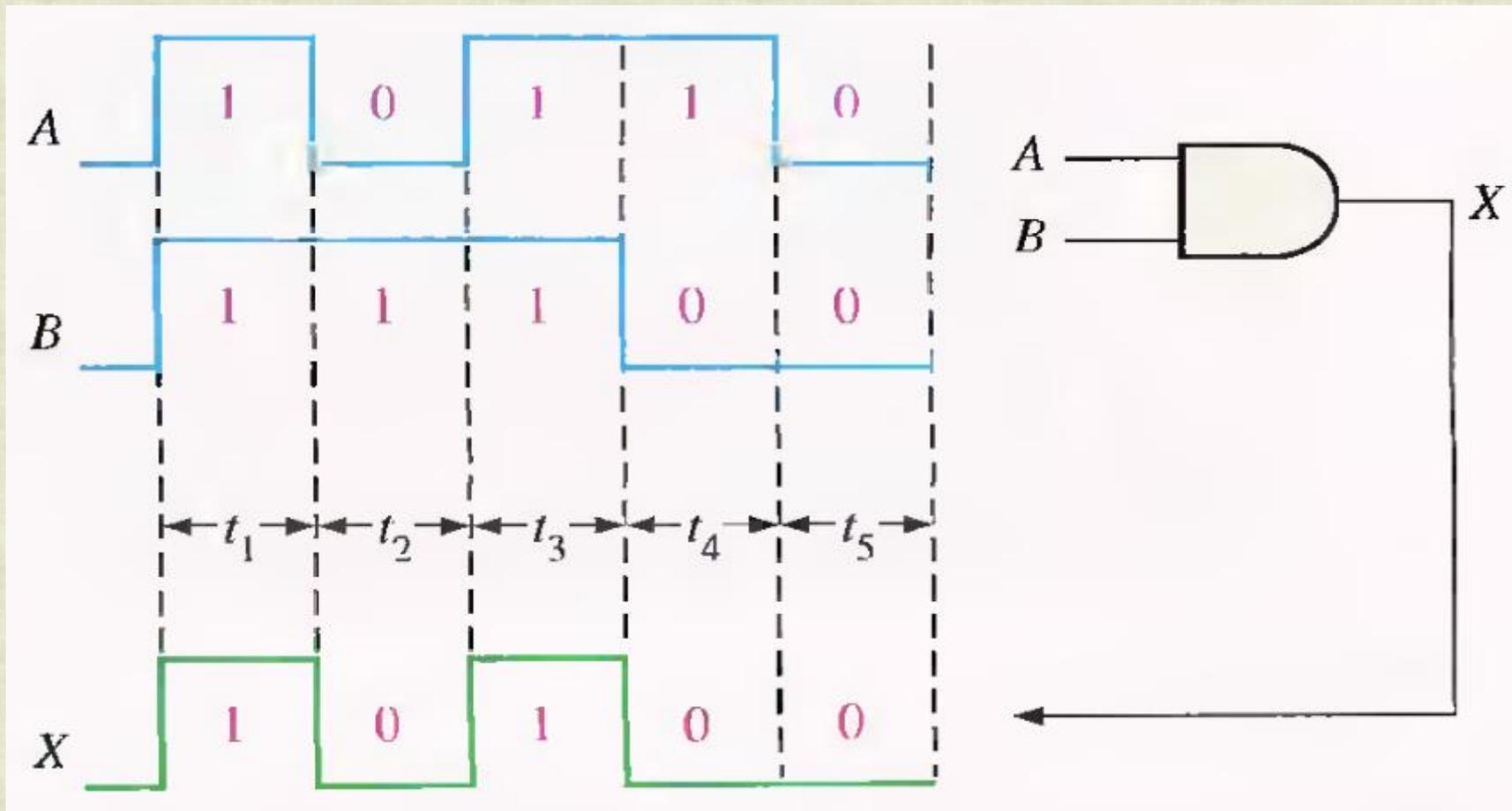
$$S = \Sigma(0, 2, 5, 7)$$

Produto de Somas

$$S = (X+Y+\bar{Z})(X+\bar{Y}+\bar{Z})(\bar{X}+Y+Z)(\bar{X}+\bar{Y}+Z)$$

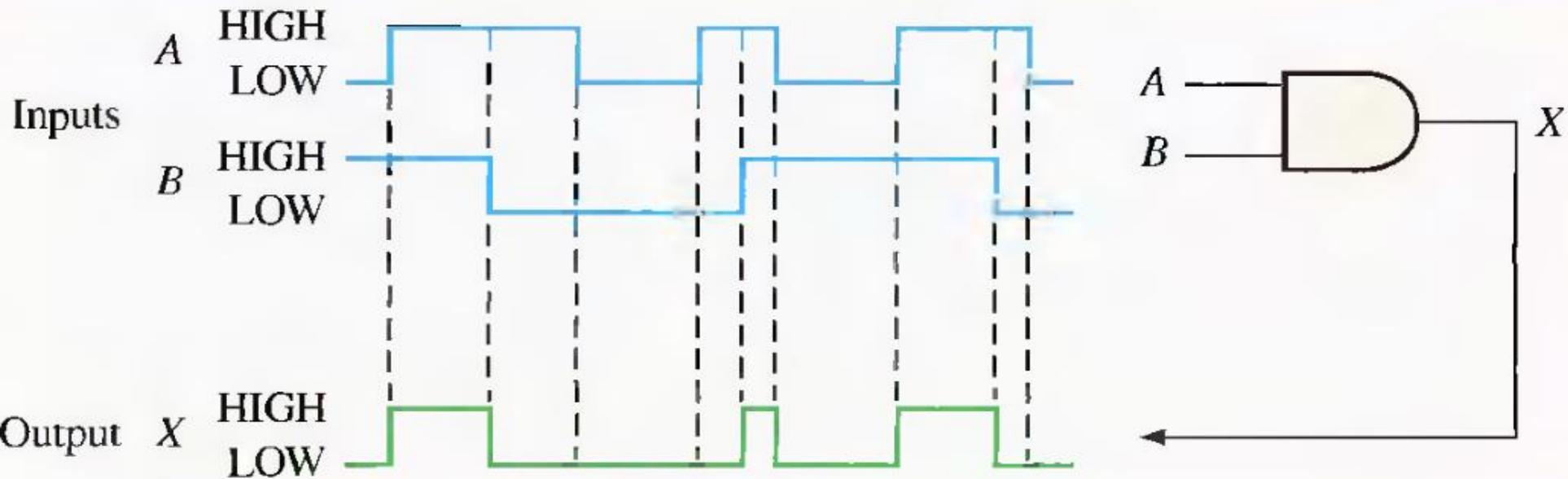
$$S = \Pi(1, 3, 4, 6)$$

Representação → Forma de Onda



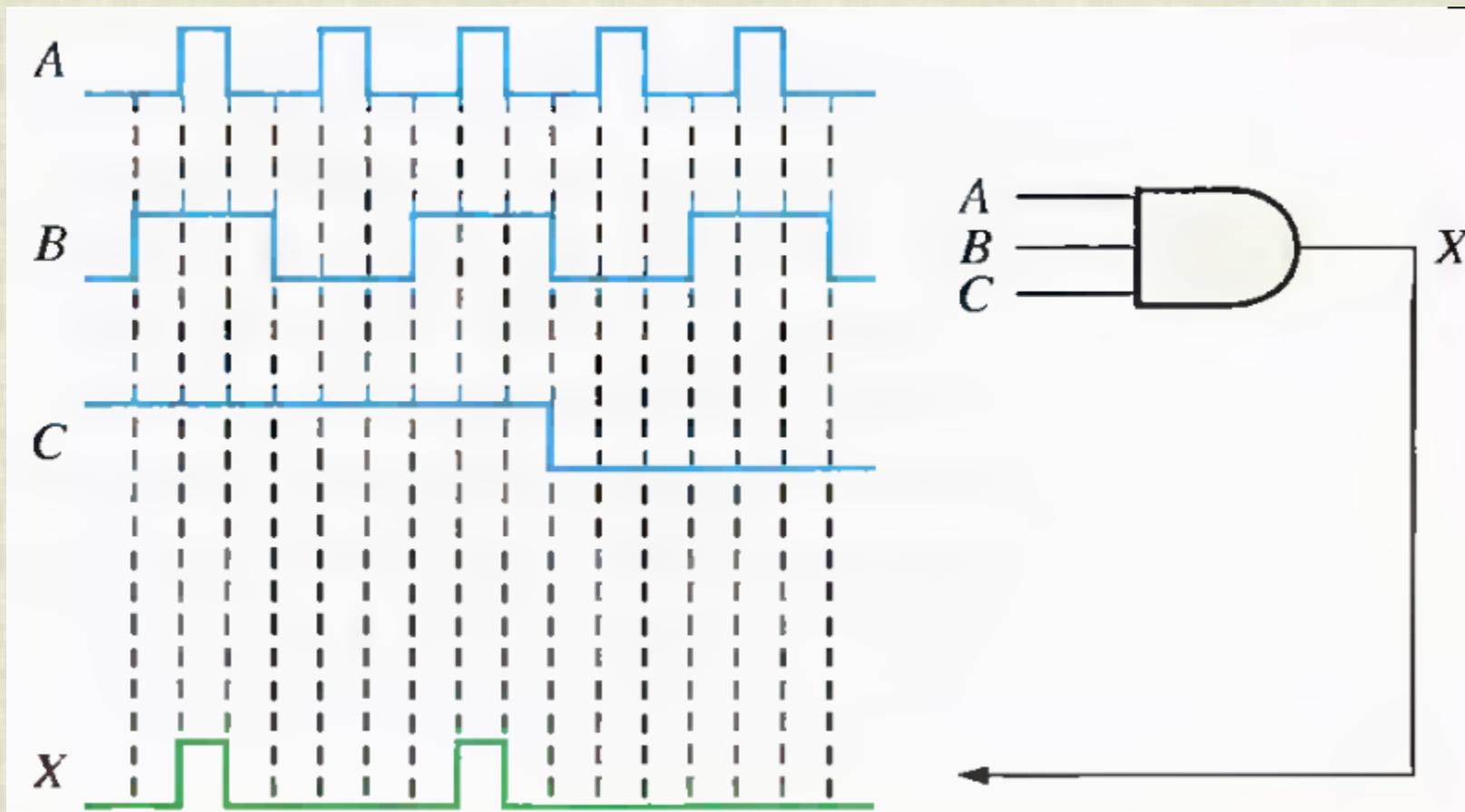
* Floyd, cap 3

Representação → Forma de Onda



* Floyd, cap 3

Representação → Forma de Onda



* Floyd, cap 3

Exercícios Lógicos

Extraia as funções lógicas e implemente as mesmas utilizando portas lógicas.

Faça as tabelas verdade e extraia a soma de produtos e o produto de somas. Por fim, desenhe o circuito e a forma de onda correspondente a tabela verdade

- 1. O caixa forte de um banco funciona com um sistema de chaves. Três pessoas têm as chaves: o gerente, seu auxiliar e o tesoureiro. A porta abre com, pelo menos, duas das três chaves, sendo que uma delas tem que ser a do tesoureiro**
- 2. O alarme de um carro possui interruptores para ligar/desligar nas duas portas da frente e um interruptor geral. O alarme soará se qualquer uma ou ambas as portas forem abertas quando o interruptor geral estiver ligado**
- 3. Uma casa possui um sistema de sensores e um cachorro dão suporte a um sistema de alarme ser disparado, avisando uma suposta tentativa de invasão. O alarme soará sempre que o cachorro da casa estiver latindo e qualquer um de 2 sensores, um instalado na janela e o outro na porta, for acionado**
- 4. Um laboratorista químico possui 4 produtos químicos A, B, C e D, que devem ser guardados em um depósito. Por conveniência, é necessário mover um ou mais produtos de um depósito para outro de tempos em tempos. A natureza dos produtos é tal, que é perigoso guardar B e C juntos, a não ser que A esteja no mesmo depósito. Também é perigoso guardar C e D juntos se B não estiver no depósito. Escreva uma expressão lógica S, de tal forma que, $S=1$ sempre que existir uma combinação perigosa no depósito**

Exercícios

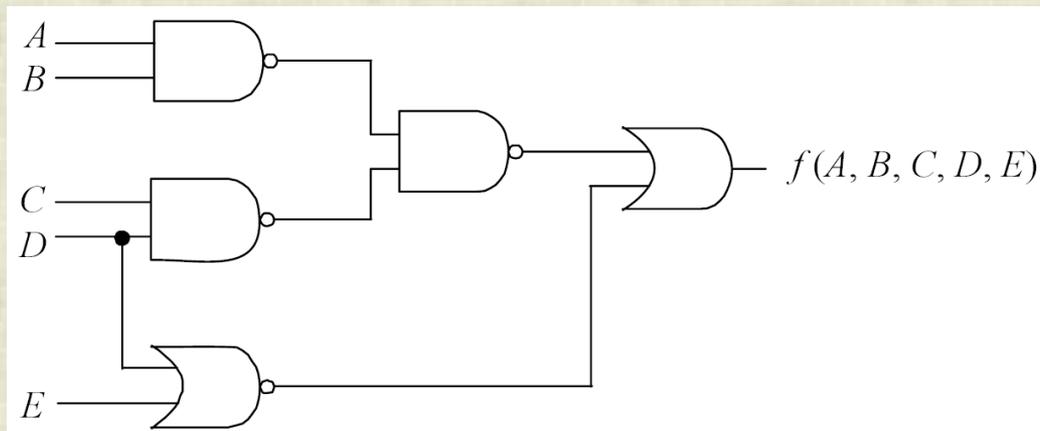
5. O diretor de uma empresa solicitou ao departamento de Recursos Humanos (RH) a contratação de um funcionário que atenda a um dos requisitos Abaixo:

- **Sexo Masculino, com curso superior ou**
- **Sexo Feminino com curso superior e idade mínima de 30 anos ou**
- **Sem curso superior com experiência na área ou**
- **Sexo Feminino, menor de 30 anos, com curso superior.**

O gerente de RH, lendo tais requisitos, e usando seus conhecimentos de lógica, resolveu simplificá-los considerando cada característica como uma variável lógica:

- **M = sexo Masculino**
- **S = com curso Superior**
- **E = com Experiência**
- **I = Idade mínima 30**

Exercícios



6. No circuito acima, que possui cinco entradas — A, B, C, D e E — e uma saída $f(A, B, C, D, E)$, qual opção apresenta uma expressão lógica equivalente à função $f(A, B, C, D, E)$?

- I. $\overline{A.B} + \overline{C.D} + D.E$
- II. $(A + B).(C + D) + D.E$
- III. $\overline{A.B} + \overline{C.D} + D + E$
- IV. $A.B + C.D + D + E$
- V. $A.B + C.D + \overline{D.E}$