

Fundamentos de Sistemas Digitais

Lógica e Álgebra de Boole

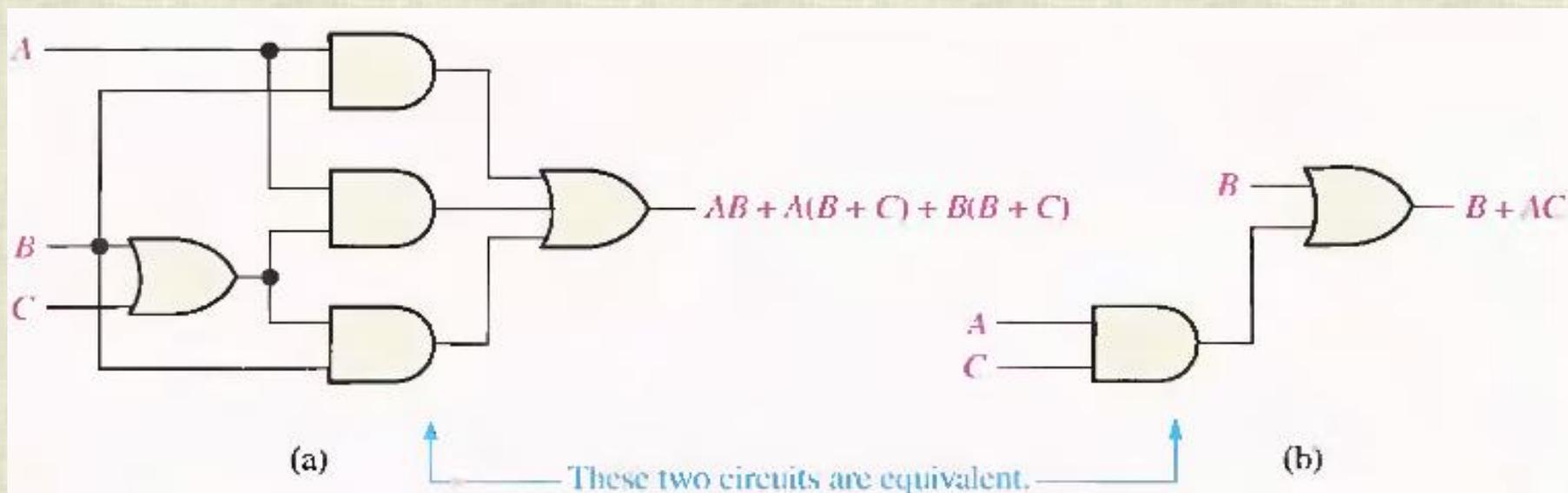
Simplificação de expressões

Referências

- **Floyd, cap 4**
- **Vahid, sec 2.5 e 2.6, cap 6**
- **Daghlian, cap 9 e 13**

Motivação para Otimização Lógica

- **Principais critérios de otimização:**
 - **Desempenho:** medido em atraso da entrada para saída (e.g. ns)
 - **Tamanho:** medido em nro de transistores ou área (e.g. um)
 - **Potência consumida:** medida de Watts (W)



▲ **FIGURE 4-17**

Propriedades da Álgebra Booleana

- Postulados

$A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A$	$A + 1 = 1$	$A \cdot 1 = A$
$A + \bar{A} = 1$	$A \cdot \bar{A} = 0$	$A + A = A$	$A \cdot A = A$

- Propriedade Comutativa

$A + B = B + A$	$A \cdot B = B \cdot A$
-----------------	-------------------------

► **FIGURE 4-1**

Application of commutative law of addition.



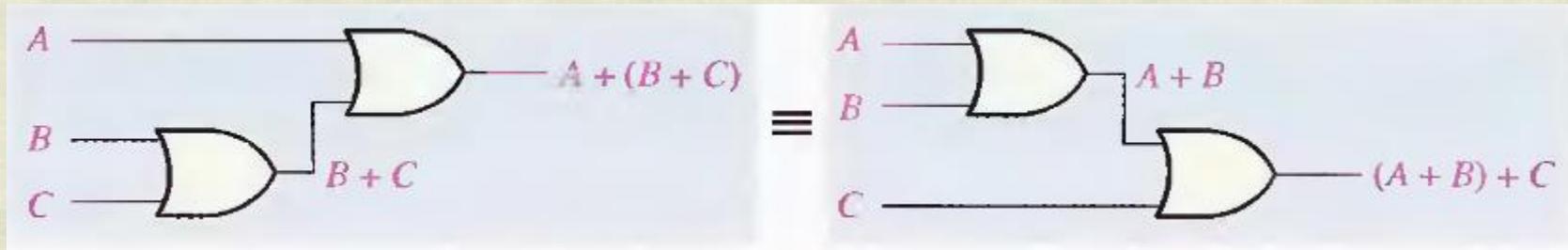
Demonstre esta equivalência com chaves !

Propriedades da Álgebra Booleana

- Propriedade Associativa

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = (B \cdot C) \cdot A$$



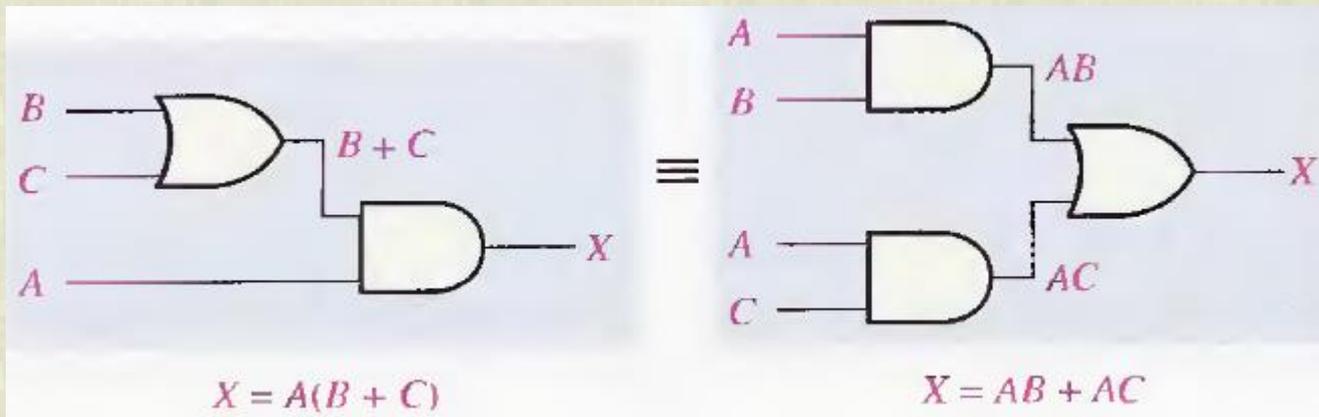
Demonstre esta equivalência com AND e NAND!

Demonstre esta equivalência com chaves !

Propriedades da Álgebra Booleana

- Propriedade Distributiva

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

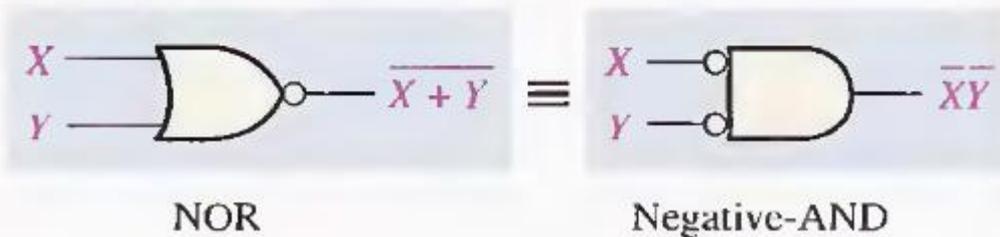
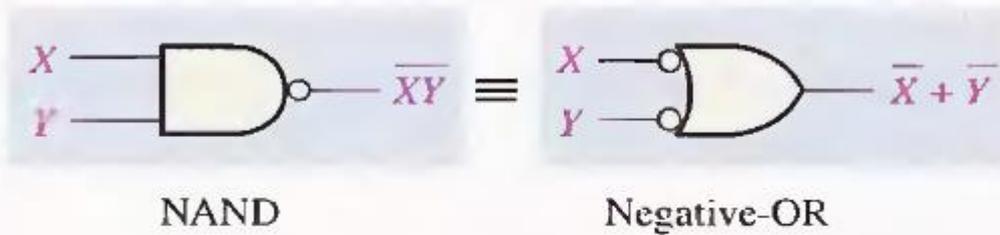


Demonstre esta equivalência com chaves !

Propriedades da Álgebra Booleana

- Teorema de De Morgan

$\overline{A \cdot B \cdot C \dots} = \overline{A + B + C + \dots}$	$\overline{A + B + C + \dots} = \overline{A \cdot B \cdot C \dots}$
---	---



Inputs		Output	
X	Y	\overline{XY}	$\overline{X + Y}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Inputs		Output	
X	Y	$\overline{X + Y}$	\overline{XY}
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Propriedades da Álgebra Booleana

- Postulados

$A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A$	$A + 1 = 1$	$A \cdot 1 = A$
$A + \bar{A} = 1$	$A \cdot \bar{A} = 0$	$A + A = A$	$A \cdot A = A$

- Propriedade Comutativa

$A + B = B + A$	$A \cdot B = B \cdot A$
-----------------	-------------------------

- Propriedade Associativa

$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(A \cdot B) \cdot C = (B \cdot C) \cdot A$
-----------------------------	---

- Propriedade Distributiva

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

- Teorema de De Morgan

$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \dots = \overline{A + B + C + \dots}$	$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \dots = \overline{A \cdot B \cdot C \dots}$
--	--

Demonstração com Portas Lógicas

- **Regra 10: $A + AB = A$**
- **Regra 11: $A + A'B = A + B$**
- **Regra 12: $(A+B)(A+C) = A + BC$**
- **Exercício: provar estas regras utilizando as regras anteriores !**
 - Por fim, Monte a tabela verdade e o circuito (sem/com otimização)

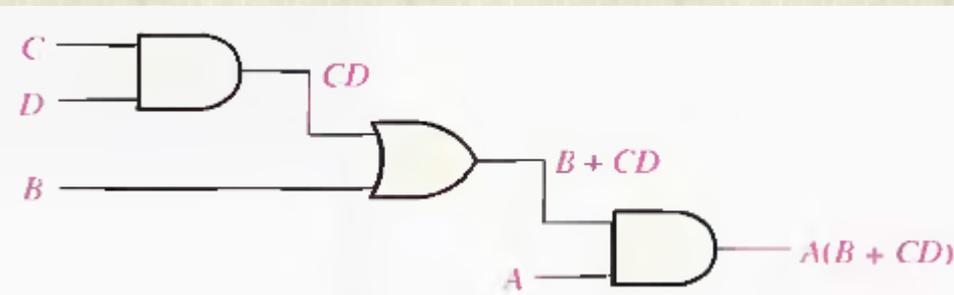
Fundamentos de Sistemas Digitais

Conversões

Expressão Booleana → Circuitos

- $F = A(B+CD)$
- Fazer circuito em aula

Circuito → Tabela verdade



INPUTS				OUTPUT
A	B	C	D	$A(B + CD)$
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

Simplificação c/ Álgebra Booleana

Using Boolean algebra techniques, simplify this expression:

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

Solution The following is not necessarily the only approach.

Step 1: Apply the distributive law to the second and third terms in the expression, as follows:

$$AB + AB + AC + BB + BC$$

Step 2: Apply rule 7 ($BB = B$) to the fourth term.

$$AB + AB + AC + B + BC$$

Step 3: Apply rule 5 ($AB + AB = AB$) to the first two terms.

$$AB + AC + B + BC$$

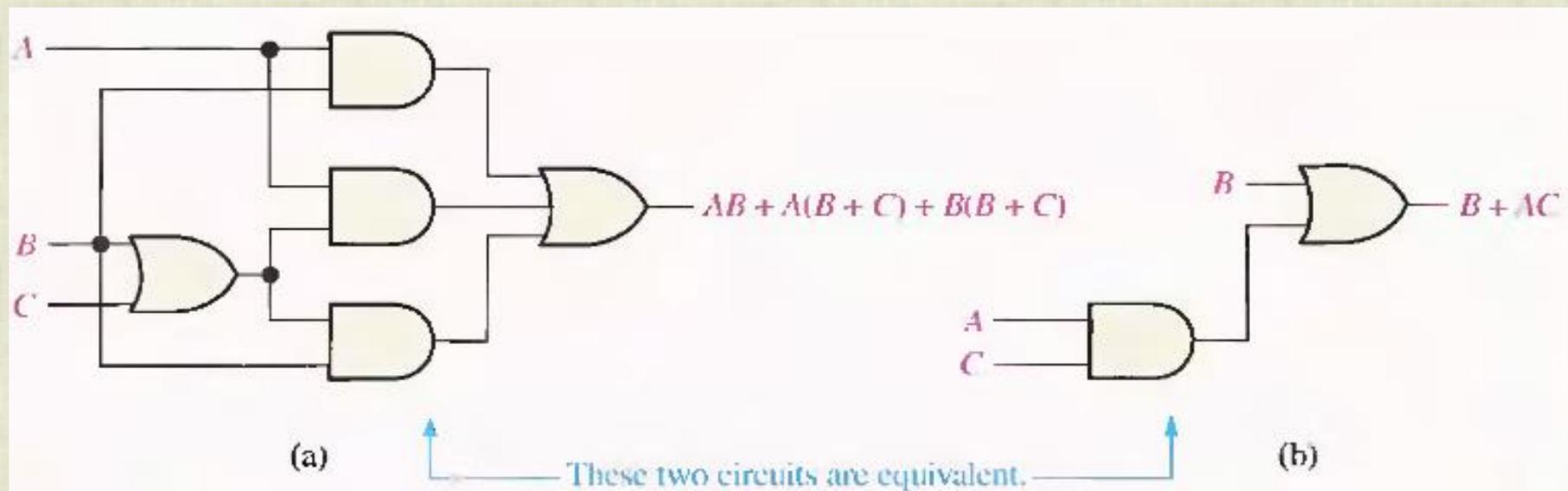
Step 4: Apply rule 10 ($B + BC = B$) to the last two terms.

$$AB + AC + B$$

Step 5: Apply rule 10 ($AB + B = B$) to the first and third terms.

$$B + AC$$

Simplificação c/ Álgebra Booleana



▲ FIGURE 4-17

Exercícios

- **Prove a equivalência de**
 - Respostas no Floyd
- **$[AB'(C+BD)+A'B']C = B'C$**
- **$A'BC + AB'C' + A'B'C' + AB'C + ABC = BC+AB'+B'C'$**
- **$(AB+AC)'+A'B'C = A'+B'C'$**
- **Atividade p Próxima Aula**
 - Entregar no início da aula
 - Floyd: exercícios seção 4.2 até 4.5, página 252
 - Escrito à mão !!!! Explicar solução passo a passo !!!
 - Pelo menos 10 exercícios sendo de tipos e complexidades diferentes

Forma Padrão de Soma de Produtos

- **Todas as variáveis devem aparecer em cada termo da expressão**
- **Motivo: Facilita construção de tabela verdade e mapa de Karnaugh**

- **Expressão ‘padrão’:**
 - $AB'CD + A'B'CD' + ABC'D'$
 - $AB + A'B'$

- **Expressão ‘não padrão’:**
 - $AB + ABC$
 - $A'B + AB'C + AC'$

SOP padrão → Tabela Verdade

EXAMPLE 4-18

Develop a truth table for the standard SOP expression $\overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + ABC$.

Solution

There are three variables in the domain, so there are eight possible combinations of binary values of the variables as listed in the left three columns of Table 4-6. The binary values that make the product terms in the expressions equal to 1 are $\overline{A}\overline{B}C$: 001; $A\overline{B}\overline{C}$: 100; and ABC : 111. For each of these binary values, place a 1 in the output column as shown in the table. For each of the remaining binary combinations, place a 0 in the output column.

▶ TABLE 4-6

INPUTS			OUTPUT	PRODUCT TERM
A	B	C	X	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$A\overline{B}\overline{C}$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	ABC

Expressão Booleana → SOP padrão

- **O caixa forte de um banco funciona com um sistema de chaves. Três pessoas têm as chaves: o gerente, seu auxiliar e o tesoureiro. A porta abre com, pelo menos, duas das três chaves, sendo que uma delas tem que ser a do tesoureiro**

SOP padrão → Mapa de Karnaugh

► **FIGURE 4-21**

A 3-variable Karnaugh map showing product terms.

		<i>C</i>	
		0	1
<i>AB</i>	00		
	01		
	11		
	10		

(a)

		<i>C</i>	
		0	1
<i>AB</i>	00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$
	01	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$
	11	$AB\bar{C}$	ABC
	10	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$

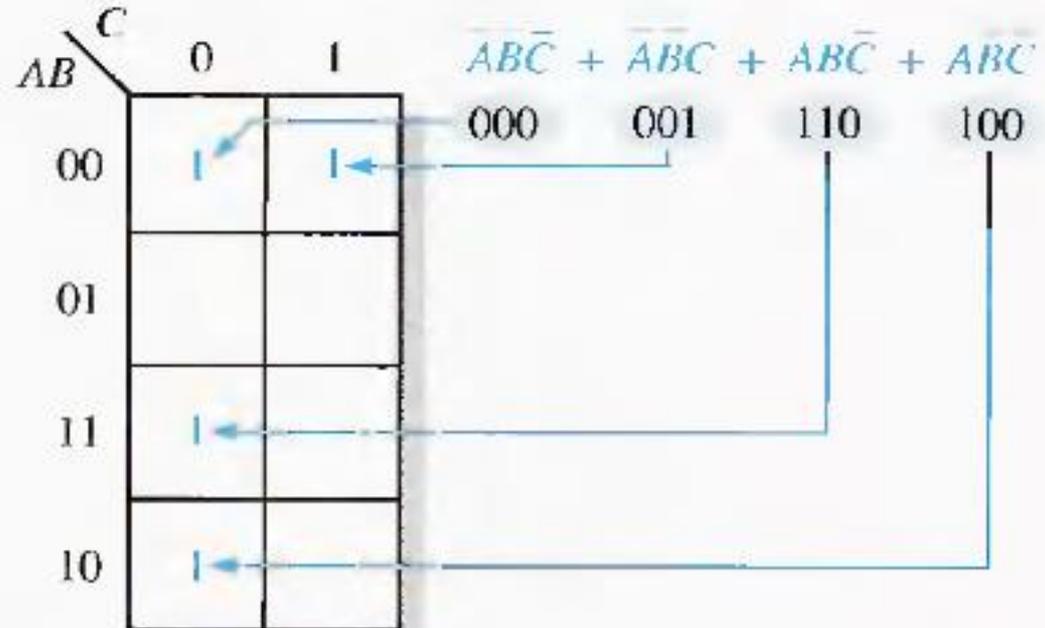
(b)

Como preencher a tabela com a expressão ?
 $a'b'c' + a'b'c + abc' + ab'c'$

SOP padrão → Mapa de Karnaugh

▶ FIGURE 4-24

Example of mapping a standard SOP expression.



SOP padrão → Mapa de Karnaugh

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00				
	01				
	11				
	10				

(a)

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}CD$
	01	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$
	11	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BC\bar{D}$	$\bar{A}BCD$
	10	$\bar{A}BC\bar{D}$	$\bar{A}BCD$	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$

(b)

◀ **FIGURE 4-22**

A 4-variable Karnaugh map.

Como preencher a tabela com a expressão ?

$$a'b'c'd + a'b'cd + a'bc'd' + abc'd' + abc'd + abcd + ab'cd'$$

SOP padrão → Mapa de Karnaugh

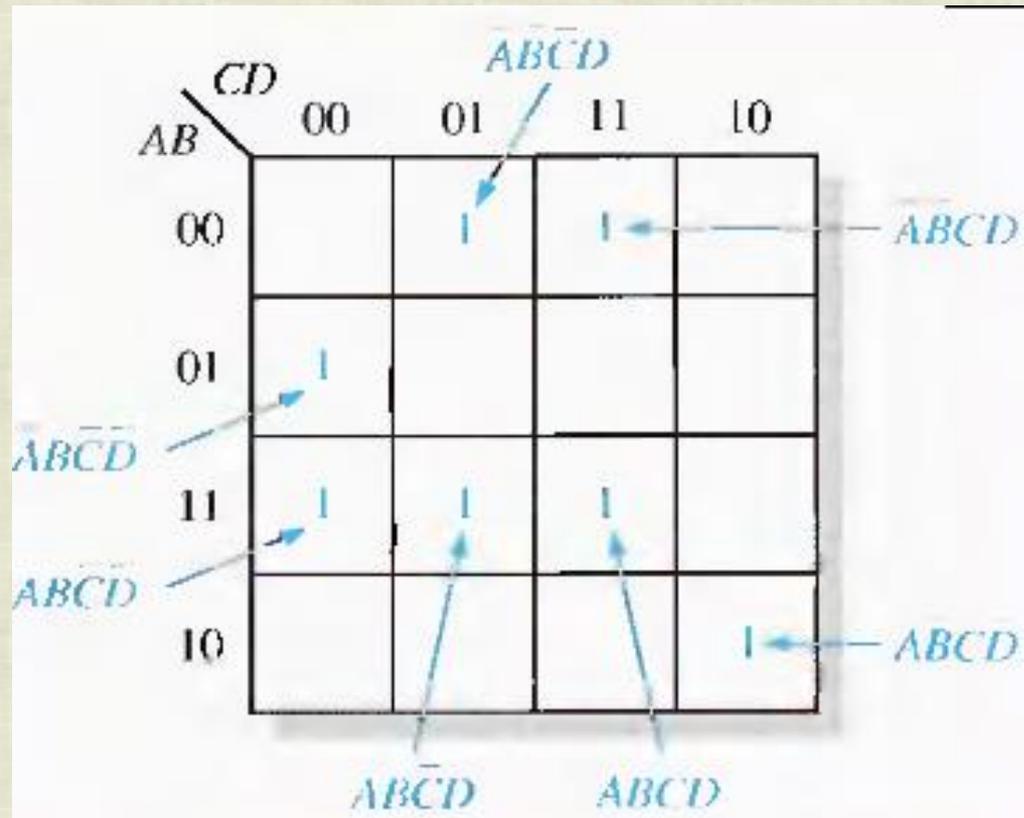


Tabela Verdade → Karnaugh

▶ **FIGURE 4-35**

Example of mapping directly from a truth table to a Karnaugh map.

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

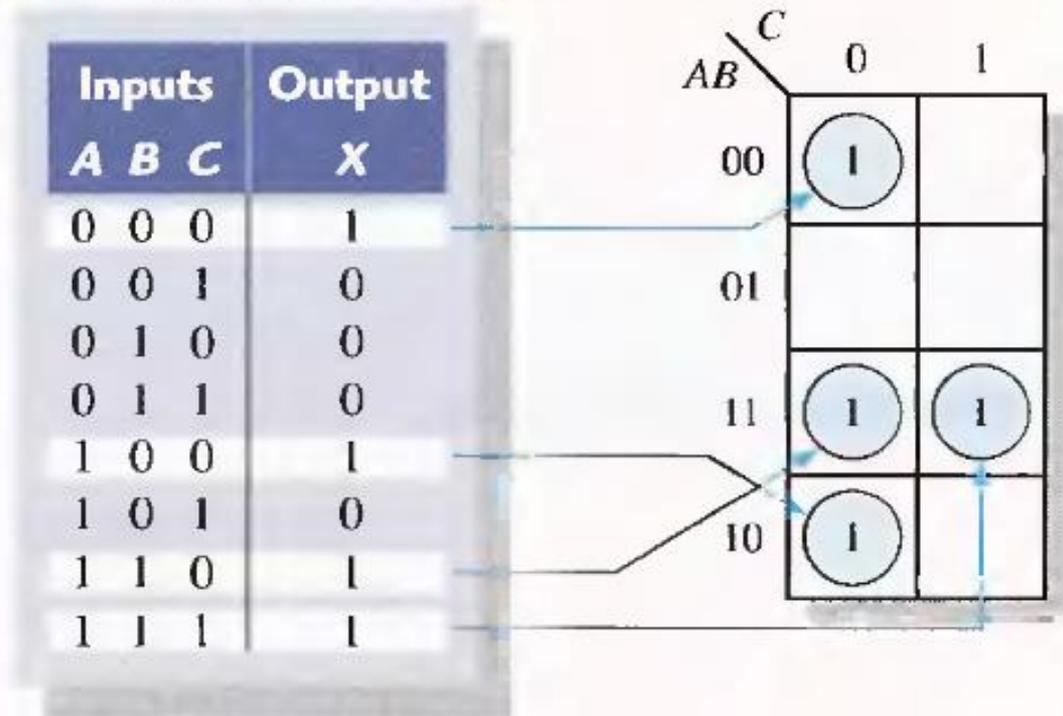
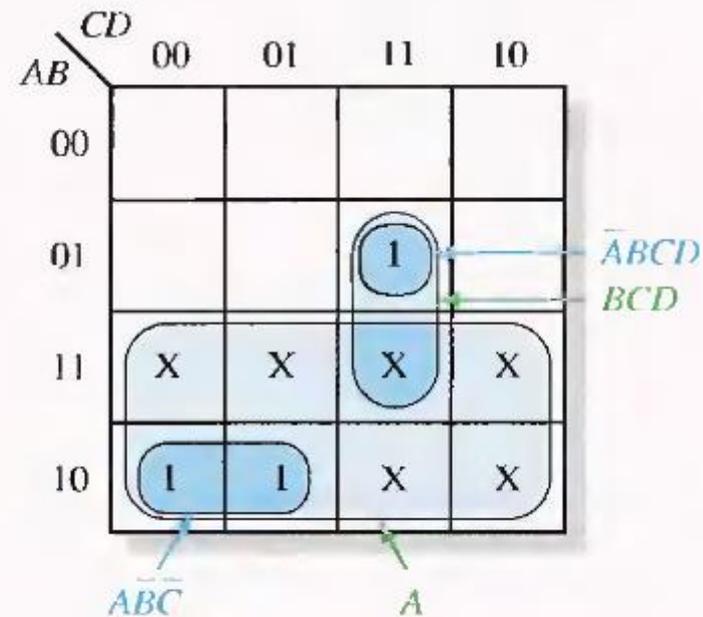


Tabela Verdade → Karnaugh

Inputs	Output
<i>ABCD</i>	<i>Y</i>
0 0 0 0	0
0 0 0 1	0
0 0 1 0	0
0 0 1 1	0
0 1 0 0	0
0 1 0 1	0
0 1 1 0	0
0 1 1 1	1
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	X
1 0 1 1	X
1 1 0 0	X
1 1 0 1	X
1 1 1 0	X
1 1 1 1	X

(a) Truth table

Don't cares



- (b) Without "don't cares" $Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BCD$
 With "don't cares" $Y = A + BCD$

Minimização com Mapas de Karnaugh

- Encontre os agrupamentos retangulares de 2, 4, 8, 16 “uns” adjacentes

S_1

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	X	0	0
01	1	X	X	0
11	1	1	X	1
10	1	1	X	1

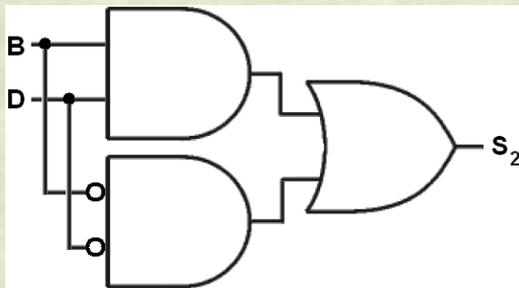
$$S_1 = B\bar{C} + A$$



S_2

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	X
01	0	1	X	0
11	0	X	1	0
10	X	0	0	1

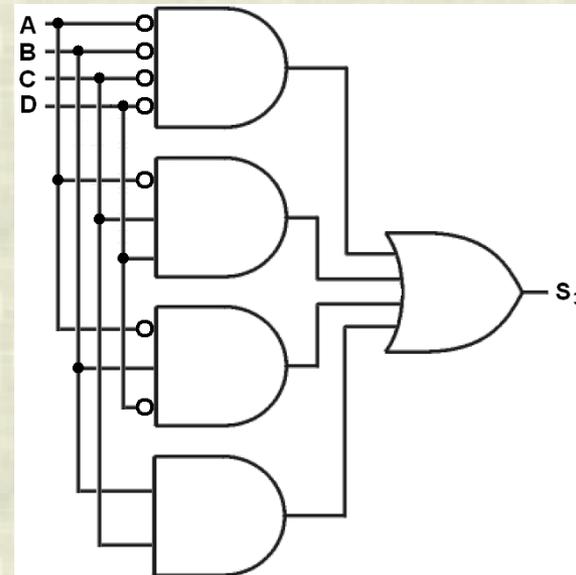
$$S_2 = BD + \bar{B}\bar{D}$$



S_3

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

$$S_3 = \bar{A}\bar{C}\bar{B}\bar{D} + \bar{A}CD + \bar{A}BD + BC$$



Como Agrupar ?

	<i>C</i>	0	1
<i>AB</i>			
00		1	1
01		1	0
11		1	1
10		1	1

	<i>C</i>	0	1
<i>AB</i>			
00		1	0
01		1	0
11		1	1
10		1	0

	<i>CD</i>	00	01	11	10
<i>AB</i>					
00		0	0	1	0
01		0	1	1	0
11		0	1	1	0
10		1	1	1	1

	<i>C</i>	0	1
<i>AB</i>			
00		1	1
01		1	0
11		1	0
10		1	1

	<i>CD</i>	00	01	11	10
<i>AB</i>					
00		0	1	1	0
01		0	1	0	0
11		0	1	0	1
10		1	1	1	0

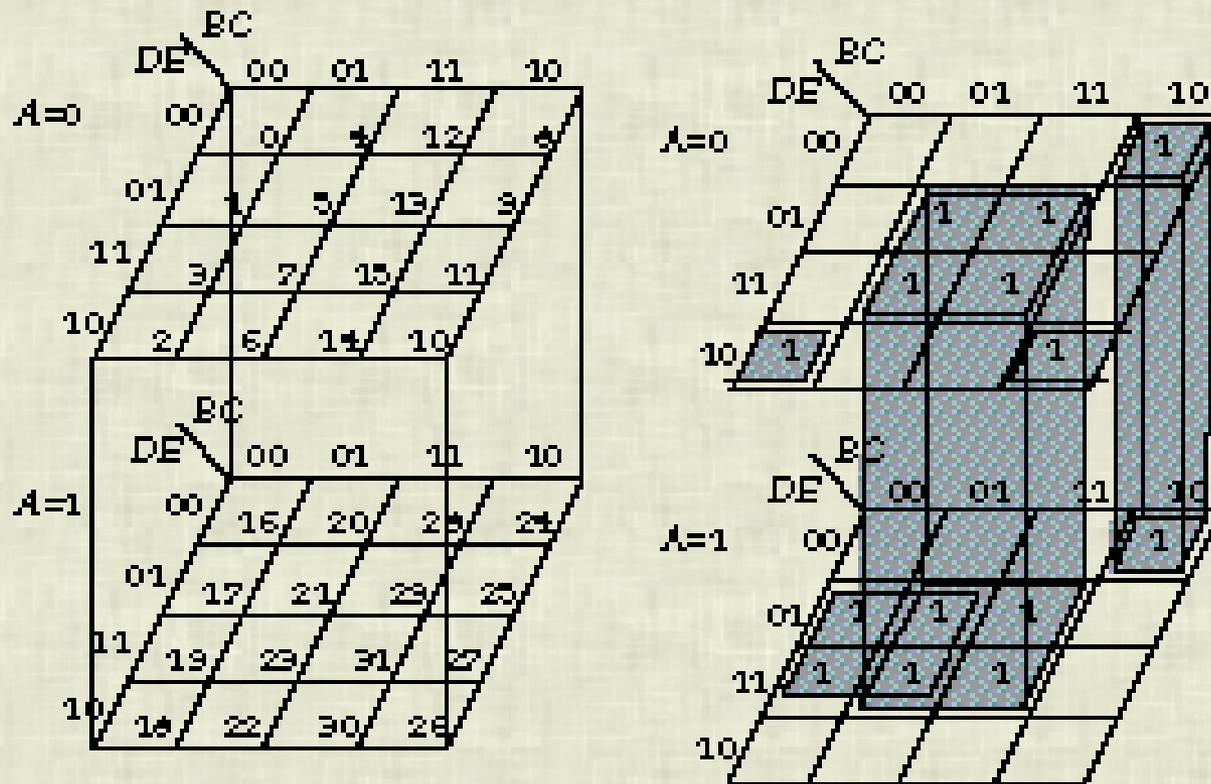
	<i>CD</i>	00	01	11	10
<i>AB</i>					
00		0	1	0	1
01		0	0	1	1
11		1	0	1	1
10		1	0	0	1

SOP padrão → Mapa de Karnaugh

- **Exercício em aula**

- Monte o mapa de Karnaugh para as seguintes expressões
- $A'BC + AB'C + AB'C'$
- $A'BCD' + ABCD' + ABC'D' + ABCD$
- $AC(B'+C)$

Mapa de Karnaugh c/ 5 variáveis

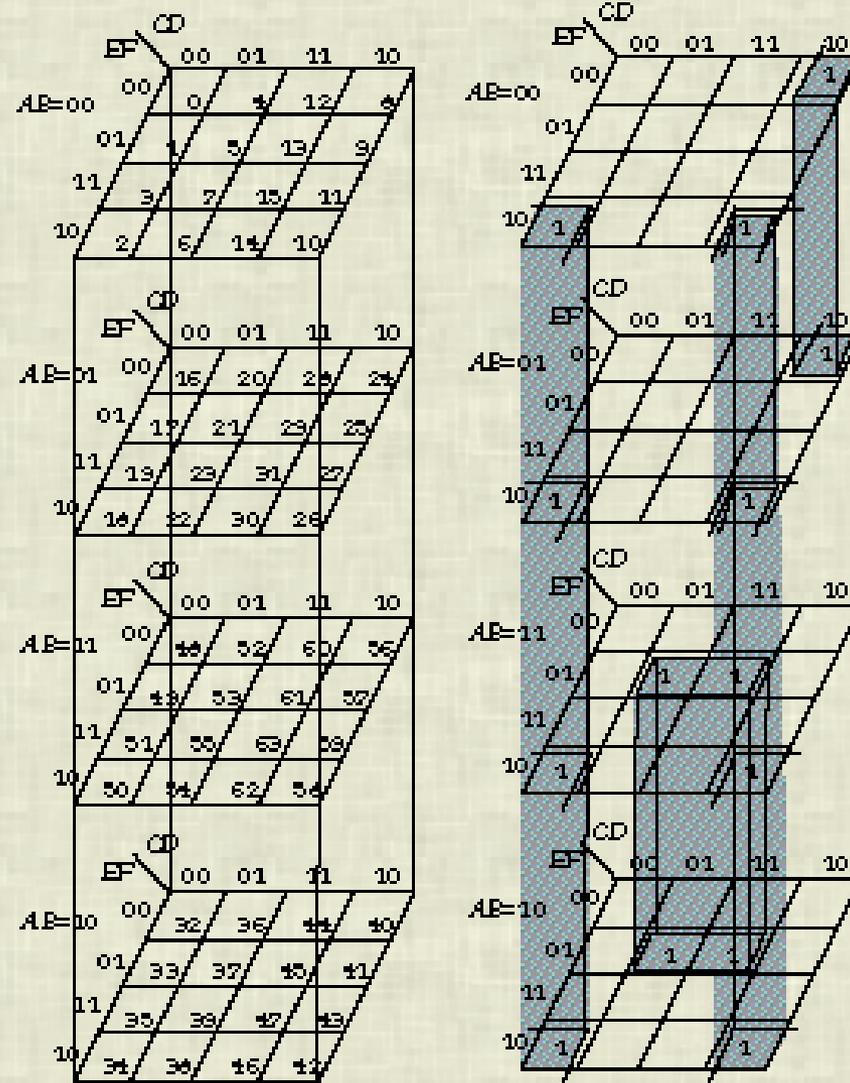


(a) Five-variable K-map

(b) Example

Figure 1.51 Five-variable K-map and example.

Mapa de Karnaugh c/ 6 variáveis



(a) Six-variable K-map

(b) Example

Figure 2.52 Six-variable K-map and example.

Minimização com Mapas de Karnaugh

- **Limitações de Mapas de Karnaugh**
 - Difícil lidar com funções com mais de 4 variáveis.
 - 5 e 6 variáveis é factível, mas complexo
 - Difícil de automatizar !!!
- **Outras referências**
 - <https://www.youtube.com/watch?v=73xFPHTsCFk>
(simplificação booleana)
 - <https://www.youtube.com/watch?v=luMHYC6UQ1o>
(Karnaugh português)
 - <https://www.youtube.com/watch?v=A0XupfXiKIo>
(Karnaugh em inglês)
- **Simuladores e Ferramentas Computacionais**
 - <http://goo.gl/sl8s0S> (Karma)
 - <http://sontrak.com/> (Logic Friday – Boolean logic optimization)

Atividades p Próxima Aula

- **Exercícios do Moodle**

- Simplificação por Karnaugh e Quine-McCluskey
- Só a parte de Karnaugh por enquanto !!!!

- **Exercícios dos livros**

- Floyd, final do cap 4.

- **Atividade p Próxima Aula**

- Entregar no início da aula
- Floyd: exercícios seção 4.7 até 4.10, página 254
- Escrito à mão !!!! Explicar a resolução do problema !!!
- Pelo menos 10 exercícios sendo de tipos e complexidades diferentes

Minimização com Quine-McCluskey

- **Referências:**

- Vahid, cap 6, pg 329
- Daghlian, sec 13.3, pg 148

- **Vantagens contra Karnaugh**

- Funciona bem com poucas variáveis
- K-map method could be less than optimal due to human error
- Quine-McCluskey + Petrick's method can guarantee an optimal answer

- **Youtube**

- <https://www.youtube.com/watch?v=Vqp9JcO9n30> (Inglês, excelente!)
- https://en.wikipedia.org/wiki/Quine%E2%80%93McCluskey_algorithm
- https://en.wikipedia.org/wiki/Petrick%27s_method
 - Tutoriais

Minimização com Quine-McCluskey

Determinar os termos irredutíveis da função

$$f(x,y,z) = x'y'z + xy'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz.$$

Solução:

$$f(x,y,z) = \Sigma(001,100,010,011,101,111)$$

	x	y	z
1	0	0	1
2	0	1	0
4	1	0	0
3	0	1	1
5	1	0	1
7	1	1	1

Minimização com Quine-McCluskey

Determinar os termos irredutíveis da função

$$f(x,y,z) = x'y'z + xy'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz.$$

Solução:

$$f(x,y,z) = \Sigma(001,100,010,011,101,111)$$

	x	y	z
1	0	0	1
2	0	1	0
4	1	0	0
3	0	1	1
5	1	0	1
7	1	1	1

	x	y	z
1,3	0	-	1
1,5	-	0	1

Minimização com Quine-McCluskey

Determinar os termos irredutíveis da função

$$f(x,y,z) = x'y'z + xy'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz.$$

Solução:

$$f(x,y,z) = \Sigma(001,100,010,011,101,111)$$

	x	y	z		x	y	z	
1	0	0	1	↙	1,3	0	-	1
2	0	1	0	↙	1,5	-	0	1
4	1	0	0	↙	2,3	0	1	-
3	0	1	1					
5	1	0	1					
7	1	1	1					

Minimização com Quine-McCluskey

Determinar os termos irredutíveis da função

$$f(x,y,z) = x'y'z + xy'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz.$$

Solução:

$$f(x,y,z) = \Sigma(001,100,010,011,101,111)$$

	x	y	z		x	y	z	
1	0	0	1	↙	1,3	0	-	1
2	0	1	0	↙	1,5	-	0	1
4	1	0	0	↙	2,3	0	1	-
3	0	1	1	↙	4,5	1	0	-
5	1	0	1					
7	1	1	1					

Minimização com Quine-McCluskey

Determinar os termos irredutíveis da função

$$f(x,y,z) = x'y'z + xy'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz.$$

Solução:

$$f(x,y,z) = \Sigma(001,100,010,011,101,111)$$

	x	y	z		x	y	z	
1	0	0	1	↙	1,3	0	-	1
2	0	1	0	↙	1,5	-	0	1
4	1	0	0	↙	2,3	0	1	-
3	0	1	1	↙	4,5	1	0	-
5	1	0	1	↙	3,7	-	1	1
7	1	1	1	↙	5,7	1	-	1

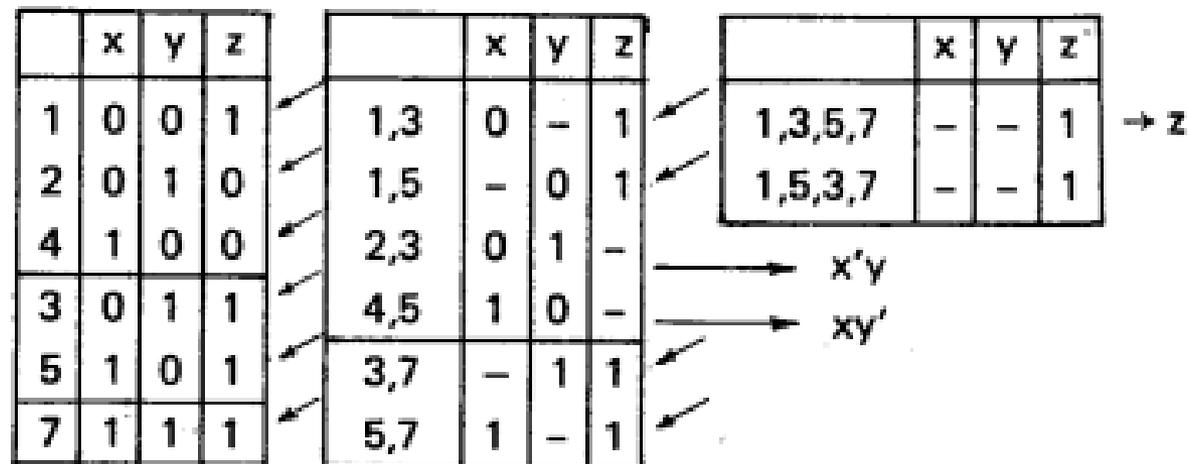
Minimização com Quine-McCluskey

Determinar os termos irredutíveis da função

$$f(x,y,z) = x'y'z + xy'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz.$$

Solução:

$$f(x,y,z) = \Sigma(001,100,010,011,101,111)$$



Como 1,3,5,7 e 1,5,3,7 representam um mesmo termo, não será necessário repeti-lo e a função simplificada é dada por:

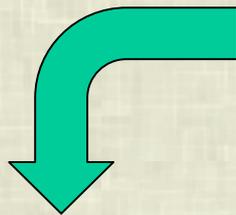
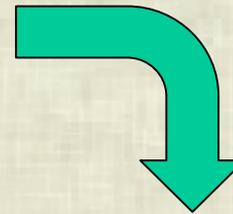
$$f = xy' + x'y + z.$$

Minimização com Quine-McCluskey

	x	y	z	
1,3	0	-	1	↙
1,5	-	0	1	
2,3	0	1	-	→
4,5	1	0	-	→
3,7	-	1	1	↙
5,7	1	-	1	↙

	x	y	z	
1,3,5,7	-	-	1	→ z
1,5,3,7	-	-	1	

$x'y$
 xy'



	1	2	3	4	5	7
1, 3, 5, 7	•		•		•	•
2, 3		•	•			
4, 5				•	•	
z	•		•		•	•
$\bar{x}y$		•	•			
$x\bar{y}$				•	•	

$$f = z + x'y + xy'$$

Minimização com Quine-McCluskey

$$y = a'bc'd' + abc'd' + a'b'c'd + a'bc'd + a'bcd' + abcd'$$

Minimização com Quine-McCluskey

$$y = a'bc'd' + abc'd' + a'b'c'd + a'bc'd + a'bcd' + abcd'$$

	a	b	c	d	
1	0	0	0	1	↘
4	0	1	0	0	↘
5	0	1	0	1	↘
12	1	1	0	0	↘
6	0	1	1	0	↘
14	1	1	1	0	↘

Minimização com Quine-McCluskey

$$y = a'bc'd' + abc'd' + a'b'c'd + a'bc'd + a'bcd' + abcd'$$

	a	b	c	d
1	0	0	0	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
12	1	1	0	0
6	0	1	1	0
14	1	1	1	0

	a	b	c	d
1,5	0	-	0	1
4,5	0	1	0	-
4,12	-	1	0	0
4,6	0	1	-	0
6,14	-	1	1	0
12,14	1	1	-	0

Minimização com Quine-McCluskey

$$y = a'bc'd' + abc'd' + a'b'c'd + a'bc'd + a'bcd' + abcd'$$

	a	b	c	d
1	0	0	0	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
12	1	1	0	0
6	0	1	1	0
14	1	1	1	0

	a	b	c	d	
1,5	0	-	0	1	
4,5	0	1	0	-	
4,12	-	1	0	0	L
4,6	0	1	-	0	✓
6,14	-	1	1	0	L
12,14	1	1	-	0	L

	a	b	c	d
4,12,6,14	-	1	-	0
4,6,12,14	-	1	-	0

$$f = a'c'd + a'bc' + bd'$$

* Daghlian, sec 13.3, pg 148 (erro no livro)

Minimização com Quine-McCluskey

$$y = a'bc'd' + abc'd' + a'b'c'd + a'bc'd + a'bcd' + abcd'$$

	a	b	c	d	
1, 5	0	-	0	1	
4, 5	0	1	0	-	
4, 13	-	1	0	0	✓
4, 6	0	1	-	0	✓
6, 14	-	1	1	0	✓
12, 14	1	1	-	0	✓

	a	b	c	d
4, 12, 6, 14	-	1	-	0
4, 6, 12, 14	-	1	-	0

$$f = a'c'd + bd'$$

	1	4	5	6	12	14
4, 12, 6, 14		•		•	•	•
1, 5	•		•			
4, 5		•	•			

$B\bar{D}$
 $\bar{A}\bar{C}D$
 $\bar{A}BC$

Minimização com Quine-McCluskey

Minimizar a função:

$$y = a'b'cde + ab'cde' + a'b'c'de' + ab'c'd'e' + ab'c'de' + a'bcd'e + \\ + abcd'e' + a'bcde + a'bcd'e' + a'b'cd'e'.$$

Minimização com Quine-McCluskey

Minimizar a função:

$$y = a'b'cde + ab'cde' + a'b'c'de' + ab'c'd'e' + ab'c'de' + a'bcd'e + \\ + abcd'e' + a'bcde + a'bcd'e' + a'b'cd'e'.$$

	a	b	c	d	e	
2	0	0	0	1	0	↙
4	0	0	1	0	0	↙
16	1	0	0	0	0	↙
12	0	1	1	0	0	↙
18	1	0	0	1	0	↙
7	0	0	1	1	1	↙
13	0	1	1	0	1	↙
22	1	0	1	1	0	↙
28	1	1	1	0	0	↙
15	0	1	1	1	1	↙

Minimização com Quine-McCluskey

Minimizar a função:

$$y = a'b'cde + ab'cde' + a'b'c'de' + ab'c'd'e' + ab'c'de' + a'bcd'e + \\ + abcd'e' + a'bcde + a'bcd'e' + a'b'cd'e'$$

	a	b	c	d	e
2	0	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0
16	1	0	0	0	0
12	0	1	1	0	0
18	1	0	0	1	0
7	0	0	1	1	1
13	0	1	1	0	1
22	1	0	1	1	0
28	1	1	1	0	0
15	0	1	1	1	1

	a	b	c	d	e
2,18	-	0	0	1	0
4,12	0	-	1	0	0
16,18	1	0	0	-	0
12,28	-	1	1	0	0
18,22	1	0	-	1	0
7,15	0	-	1	1	1
13,15	0	1	1	-	1

Minimização com Quine-McCluskey

Minimizar a função:

$$y = a'b'cde + ab'cde' + a'b'c'de' + ab'c'd'e' + ab'c'de' + a'bcd'e + \\ + abcd'e' + a'bcde + a'bcd'e' + a'b'cd'e'$$

	a	b	c	d	e
2	0	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0
16	1	0	0	0	0
12	0	1	1	0	0
18	1	0	0	1	0
7	0	0	1	1	1
13	0	1	1	0	1
22	1	0	1	1	0
28	1	1	1	0	0
15	0	1	1	1	1

	a	b	c	d	e
2,18	-	0	0	1	0
4,12	0	-	1	0	0
16,18	1	0	0	-	0
12,28	-	1	1	0	0
18,22	1	0	-	1	0
7,15	0	-	1	1	1
13,15	0	1	1	-	1

$$f = b'c'dc' + a'cd'e' + ab'c'e' + bcd'e' + ab'de' + a'cde + a'bce$$

Atividades p Próxima Aula

- **Exercícios do Moodle**
 - Simplificação por Karnaugh e Quine-McCluskey
- **Exercícios dos livros**
 - Floyd, final do cap 4.
- **Atividade p Próxima Aula**
 - Entregar no início da aula
 - Floyd: exercícios seção 4.7 até 4.10, página 254
 - Escrito à mão !!!! Explicar a resolução do problema !!!
 - Pelo menos 10 exercícios sendo de tipos e complexidades diferentes