Lista de exercícios sobre recorrências
Prof. João B. Oliveira

1. Dada a descrição abaixo para alguns valores de S_n, encontre uma maneira de representar S_n como recorrência:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 2.1 + 2 \\ S_3 &= 2.2.1 + 2.2 + 3 \\ S_4 &= 2.2.2.1 + 2.2.2 + 2.3 + 4 \\ S_5 &= 2.2.2.2.1 + 2.2.2.2 + 2.2.3 + 2.4 + 5 \\ S_n &= ? \end{aligned}$$

2. Resolva as seguintes recorrências:

(a) $P(n) = \begin{cases} 13, & n = 1 \\ 30 - P(n-1), & n > 1 \end{cases}$

(b) $Q(n) = \begin{cases} 5, & n = 1 \\ 12, & n = 2 \\ 31 - Q(n-1) - Q(n-2), & n > 2 \end{cases}$

3. Seja a definição abaixo para a função F, que serve para produzir strings:

$$F_n = \begin{cases} 'A', & n = 0 \\ 'B', & n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & n \geq 2, \end{cases}$$

onde o sinal + representa a concatenação de strings. Pela definição, temos que $F_2 = BA$, $F_3 = BAB$, $F_4 = BABBA$ e assim por diante. A partir daí, resolva os itens a seguir.

(a) Obtenha uma recorrência para L_n, que é o comprimento da string F_n.

(b) Obtenha uma recorrência para A_n, que é o número de caracteres A de F_n.

(c) Obtenha uma recorrência para B_n, que é o número de caracteres B de F_n.

(d) Mostre que $L_n = A_n + B_n$ para todo n.

(e) Altere os itens anteriores, supondo que a operação de concatenação agora é feita da seguinte maneira: $F_n = F_{n-1} +' C' + F_{n-2}$, ou seja, uma letra C sempre é intercalada entre as strings. Obtenha uma recorrência para C_n, que é o número de caracteres C em F_n.

(f) Altere os itens anteriores, supondo que a operação de concatenação agora é feita da seguinte maneira: $F_n = F_{n-1} +' C' + \text{Strip}(F_{n-2}, B)$, ou seja, uma letra C sempre é intercalada entre as strings e a função $\text{Strip}(S, X)$ retira todas as ocorrências de X em S.

(g) Altere os itens anteriores, supondo que a operação de concatenação agora é feita da seguinte maneira: $F_n = \text{Strip}(F_{n-1}, A) +' C' +' \text{Strip}(F_{n-2}, B)$.

4. Você deve determinar o número $S(n, k)$ que representa quantas strings binárias de tamanho n podem ter k bits ligados. Você sabe que poderia resolver isso através de combinações de n dados k a k, mas resolveu adotar uma análise diferente: construa uma recorrência que determine $S(n, k)$. Não fique intimidado, pois não é difícil.

5. Ogivas nucleares são baseadas em um princípio muito simples: se você juntar um monte de urânio U_{235} e bombardeá-lo com nêutrons sob certas condições bastante especiais, os núcleos de urânio se romperão, liberando energia (cerca de 180 MeV por rompimento, pra ser exato) e disparando outros nêutrons (cerca de 2.52 nêutrons em média). Isso dá origem a uma **reação em cadeia** bastante desagradável, onde gerações e gerações de nêutrons são produzidos e muita energia é liberada (muita mesmo...). Sendo assim, resolva os seguintes problemas:

   (a) Modele o número de nêutrons a cada geração, se você fornece a nêutrons iniciais.

   (b) Modele a energia liberada a cada iteração, para a nêutrons iniciais.

   (c) Modele a energia total liberada até a n-ésima geração, em MeV. Sabendo que 2.62×10^{25} MeV são um quiloton, converta para quilotons.

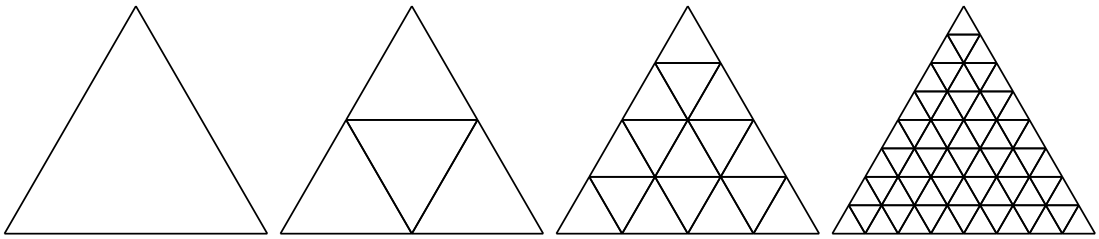
   (d) Determine o efeito de ter um nêutron a mais no início do processo, para o total de energia liberada.

   (e) Determine o efeito de perder alguns nêutrons para o meio externo, e por isso o fator de multiplicação cai de 2.52 para apenas 2.

   (f) Uma ogiva de verdade realiza cerca de 80 gerações até ser destruída por sua própria energia. Determine quantos nêutrons são usados neste caso, e a energia total liberada.

6. **Números triangulares**

   Veja as figuras abaixo, obtidas dividindo-se sucessivamente um triângulo equilátero cujo lado inicial é de comprimento unitário:



Uma iteração | Duas iterações | Três iterações | Quatro iterações

Usando recorrências, somatórios ou outras ferramentas à sua disposição, determine fórmulas fechadas para as seguintes quantidades:

(a) T_n, o número de triângulos existentes na n-ésima iteração.

(b) L_n, o número de arestas existentes na n-ésima iteração.

(c) A_n, o número de arestas formando o lado de fora do triângulo na n-ésima iteração.

(d) E_n, o número de triângulos com arestas no lado de fora do triângulo na n-ésima iteração.

(e) $\triangle_n$, o número de triângulos pequenos apontando para cima na n-ésima iteração.

(f) ∇_n, o número de triângulos pequenos apontando para baixo na n-ésima iteração.

(g) C_n, o comprimento total das linhas necessárias para traçar a n-ésima iteração.

(h) Mostre que a diferença entre $\triangle_n$ e ∇_n torna-se infinitamente grande à medida que n cresce. Mostre que apesar desta diferença cada vez maior existe essencialmente o mesmo número de triângulos para cima e para baixo à medida que n cresce.

(i) Apresente um algoritmo para desenhar a n-ésima iteração e calcule quanto tempo ele demora, se traçar uma reta custa 0.1 milionésimo de segundo. Calcule os tempos de desenho para as iterações 10, 15, 20, 25.

7. O presidente Beltrano começa a espalhar o boato de que aceita concorrer à reeleição. Ele conta a um funcionário do palácio, que sai contando para outras pessoas, e assim por diante. Quando uma pessoa escuta que ele quer concorrer Sim, ela passa a informação adiante mas tem uma probabilidade a de inverter a resposta e passá-la para Não. Se ela escuta Não, tem uma probabilidade b de passá-la adiante como Sim.

   (a) Suponha que $a = 1/4$ e $b = 1/3$. Interprete qual será a crença do eleitorado quando o boato for espalhado.

(b) Suponha que $a = 0$ e $b = 1/2$. Interprete a mesma situação.

8. Há muito tempo atrás, as universidades admitiam apenas alunos homens (foi há **muito** tempo atrás). Nessa época, as tradições eram importantes, e o filho de um aluno de Oxford tinha 80% de chance de estudar em Oxford e os que sobrassem iam para Yale. Dos filhos de quem estudou em Yale, 40% deles eram aceitos em Yale e o resto se dividia entre Oxford e Cambridge. Já para quem estudou em Cambridge, seu filho tinha 70% de chance de voltar a Cambridge, 20% de chance de ir para Oxford e 10% de chance de ir parar em Yale.

   (a) Se nesses tempos primitivos havia apenas 10000 alunos universitários, quantos estudavam em Cambridge?

   (b) O que muda se a tradição de Oxford é tão forte que o filho de um "filho de Oxford" sempre vai para Oxford?

   (c) Modifique o problema para levar em conta o fato de que um homem só tem 80% de chance de ter um filho homem. Discuta a adequação deste modelo à realidade.