
Matemática para CG

Soraia Raupp Musse

Sumário

- Introdução
- Revisão Matemática
 - Vetores
 - Matrizes

Introdução

- Em CG, trabalha-se com objetos definidos em um mundo 3D
- Todos os objetos têm forma, posição e orientação
- Precisamos de programas de computador que descrevam esses objetos e como a luz interage com eles, de forma que o valor do pixels possam ser computados

Introdução

- Dois conceitos matemáticos ajudam enormemente em CG:
 - Análise e álgebra vetorial
 - Transformações
- Com estas duas disciplinas saberemos:
 - Como descrever os objetos geométricos de uma cena
 - Como converter idéias geométricas para números
- Como resultado tem-se uma coleção de algoritmos úteis em CG

Revisão Matemática - Vetores

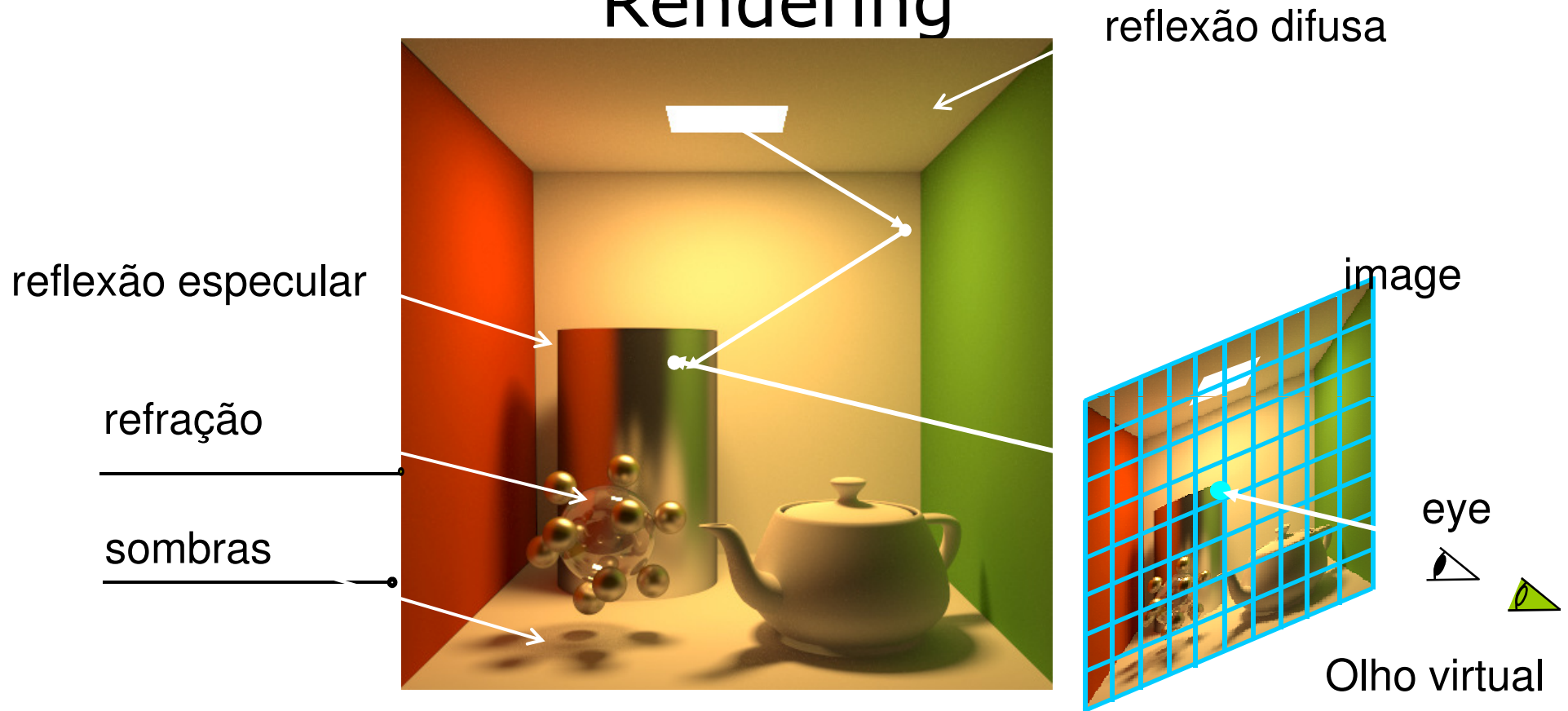
- Por que vetores são tão importantes para CG?
 - Utilizados para resolver problemas que seriam dificilmente resolvidos via outro método
 - Aritmética vetorial provê uma maneira unificada de se expressar idéias geométricas algebricamente
 - Ray-Tracing

Exemplos – Ray-Tracing



Fonte: www.povray.org

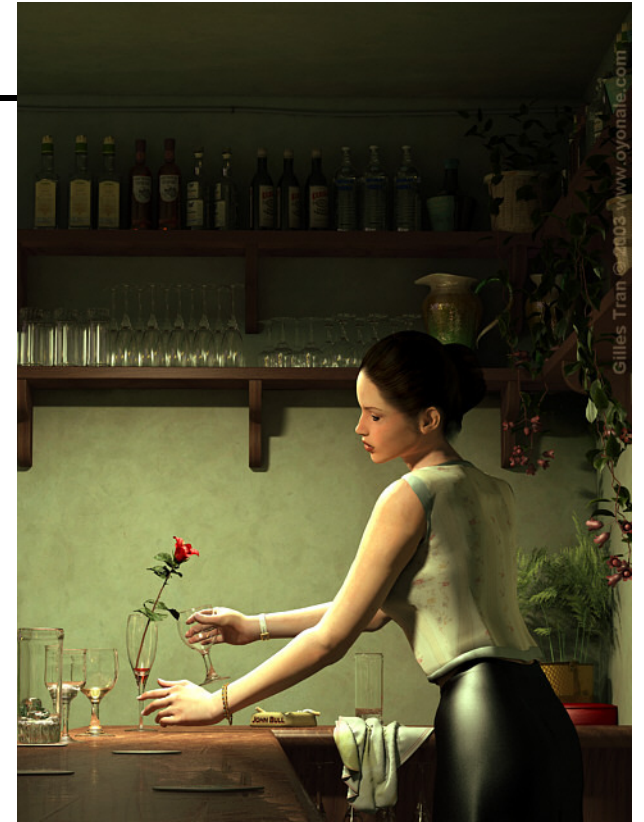
Rendering



Principais fenômenos que podem acontecer na interação entre luz e objetos







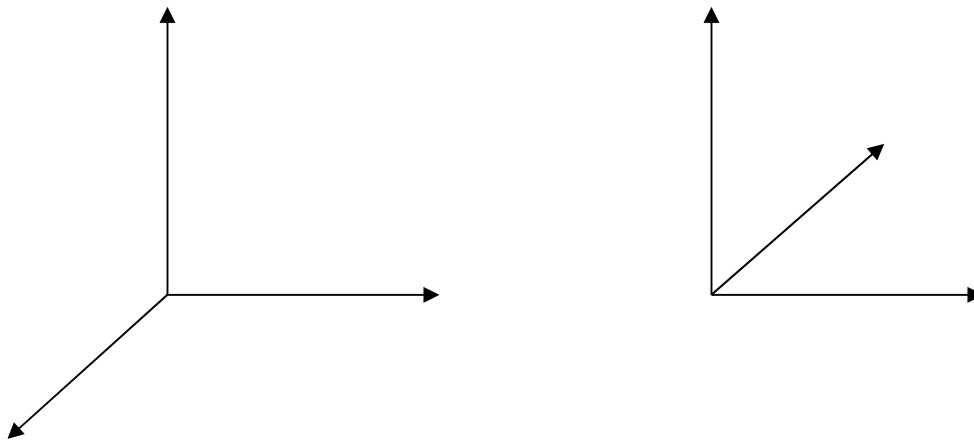


Exemplos – Ray-Tracing



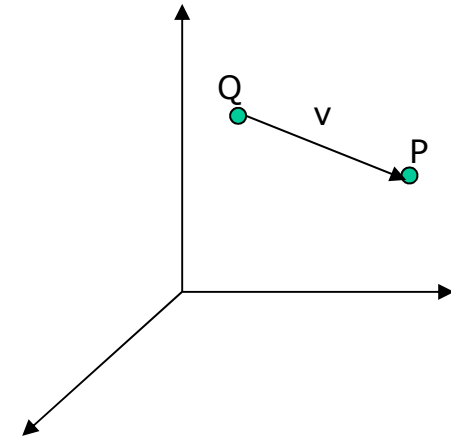
Revisão Matemática - Vetores

- SRs mão direita e mão esquerda

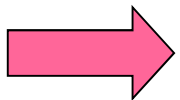


Revisão Matemática - Vetores

- Geometricamente, vetores são objetos com comprimento e direção
- Podem representar diversas entidades físicas, como força e velocidade
- $\vec{v} = P - Q$ (Diferença de dois pontos é um vetor)
 $Q + \vec{v} = P$ (Ponto + vetor = Ponto)
 $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ (Vetor n - dimensional)

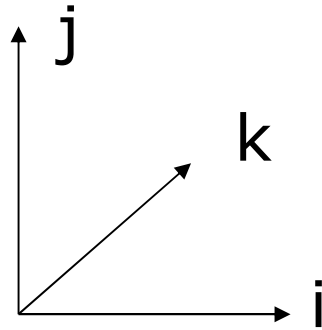
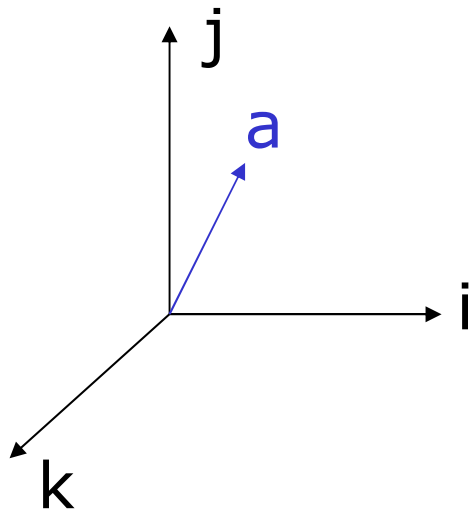


- Applet



<http://www.fisica.ufpb.br/prolicen/applets.html>

Vetores Especiais



$$\vec{a} = [axi \ ayj \ azk]$$

$$\vec{a} = axi + ayj + azk$$

Vetores – Produto Escalar

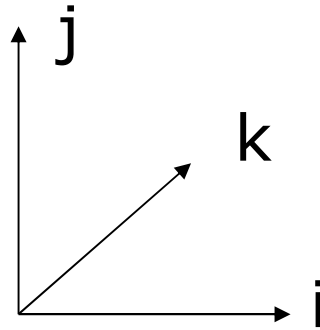
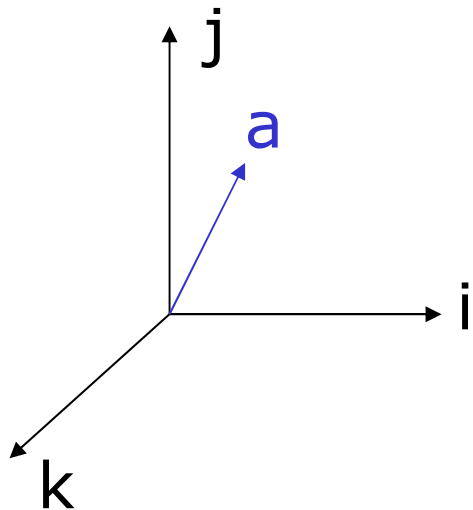
- Vetores unitários padrões

$$\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$$

$$(a,b,c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$\text{Ex : } \vec{v} = (2,5,-1) = 2(1,0,0) + 5(0,1,0) - 1(0,0,1) = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 1\vec{k}$$

Revisão Matemática - Vetores



Inversão de vetores: $\text{MULT}(-1)$

$$\vec{a} = [axi \ ayj \ azk]$$

$$\vec{a} = axi + ayj + azk$$

$$-1.\vec{a} = -axi - ayj - azk$$

Como ficaria $-1.\mathbf{a}$? 

Revisão Matemática - Vetores

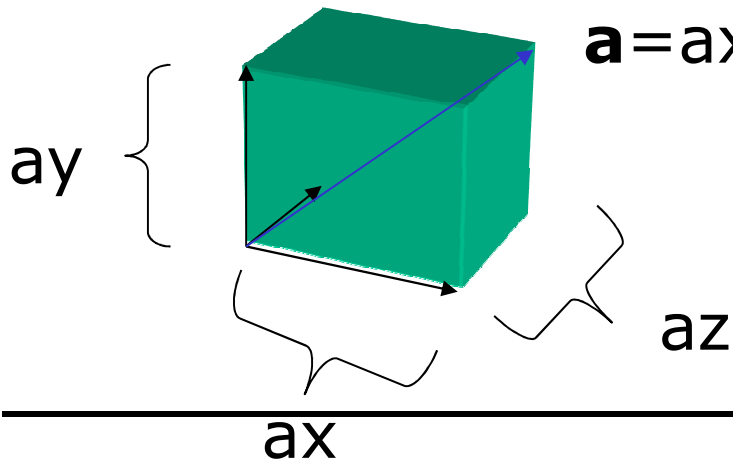
- Magnitude, tamanho (sempre positivo) ou módulo do vetor
DISTÂNCIA ENTRE
DOIS PONTOS

$$\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 + \dots + \vec{v}_m^2}$$

- Origem em Pitágoras $h^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$

$$\mathbf{a} = ax\mathbf{i} + ay\mathbf{j} + az\mathbf{k}$$



$$|\mathbf{a}| = \sqrt{ax^2 + ay^2 + az^2}$$

Revisão Matemática - Vetores

- Vetor Unitário (magnitude = 1)
 - Algumas vezes é interessante normalizar um vetor, tornando-o unitário

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left[\frac{ax}{|\vec{a}|} \frac{ay}{|\vec{a}|} \frac{az}{|\vec{a}|} \right]$$

$$\text{Ex : } \vec{a} = (3, -4), |\vec{a}| = 5 \text{ e } \hat{a} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right), |\hat{a}| = 1$$

Para você fazer:

Sendo $\vec{a} = (2, -3)$, calcule (escreva com a notação matemática) :

Módulo de a :

Vetor unitário a :

Módulo do vetor Unitário a :

Resultado:

Sendo $\vec{a} = (2, -3)$, calcule (escreva com a notação matemática) :

Módulo de a :

Vetor unitário a :

Módulo do vetor Unitário a :

$$\vec{a} = (2, -3)$$

$$|a| = \sqrt{13} \cong 3,6055$$

$$\hat{a} = \left(\frac{2}{3,6055}, \frac{-3}{3,6055} \right) = (0,55, -0,83)$$

$$|\hat{a}| = 1$$

Revisão Matemática - Vetores

- Operações Básicas:
 - Soma de Vetores

$$\vec{a} = [ax \ ay \ az] \quad \vec{b} = [bx \ by \ bz]$$

$$\vec{a} = (5, 3, 6)$$

$$\vec{b} = (-2, -5, 1)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (3, -2, 7)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (5, 3, 6) + (2, 5, -1) = (7, 8, 5)$$

Revisão Matemática - Vetores

- Operações Básicas:
 - Soma de Vetores

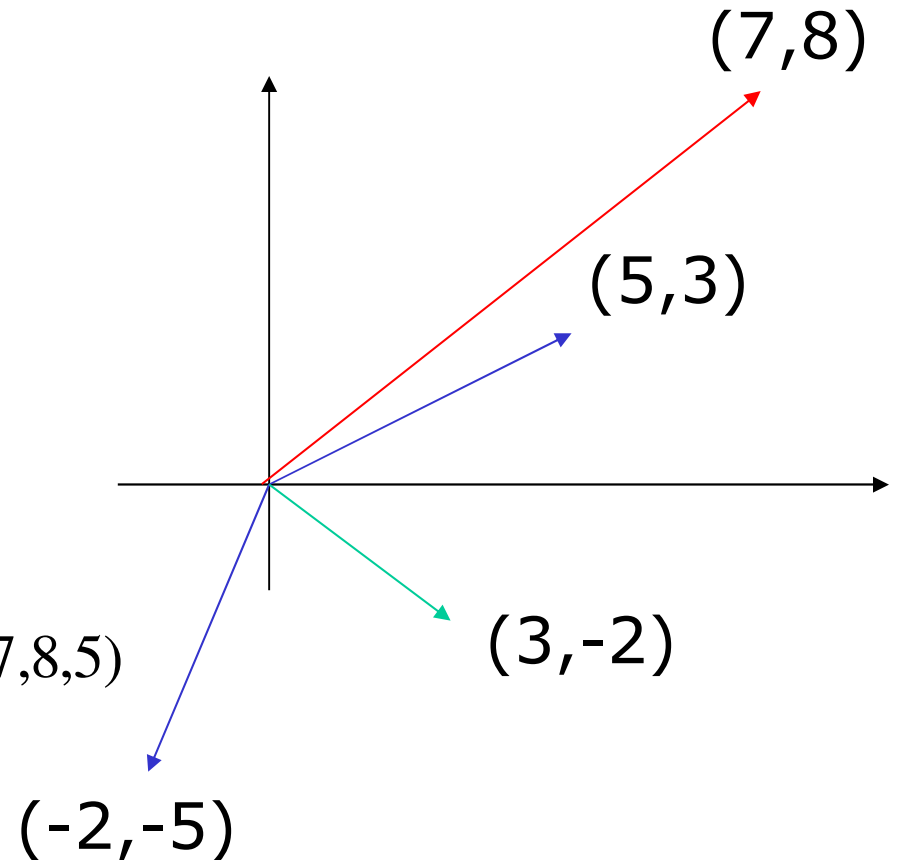
$$\vec{a} = [a_x \ a_y \ a_z] \quad \vec{b} = [b_x \ b_y \ b_z]$$

$$\vec{a} = (5,3,6)$$

$$\vec{b} = (-2,-5,1)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (3,-2,7)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (5,3,6) + (2,5,-1) = (7,8,5)$$

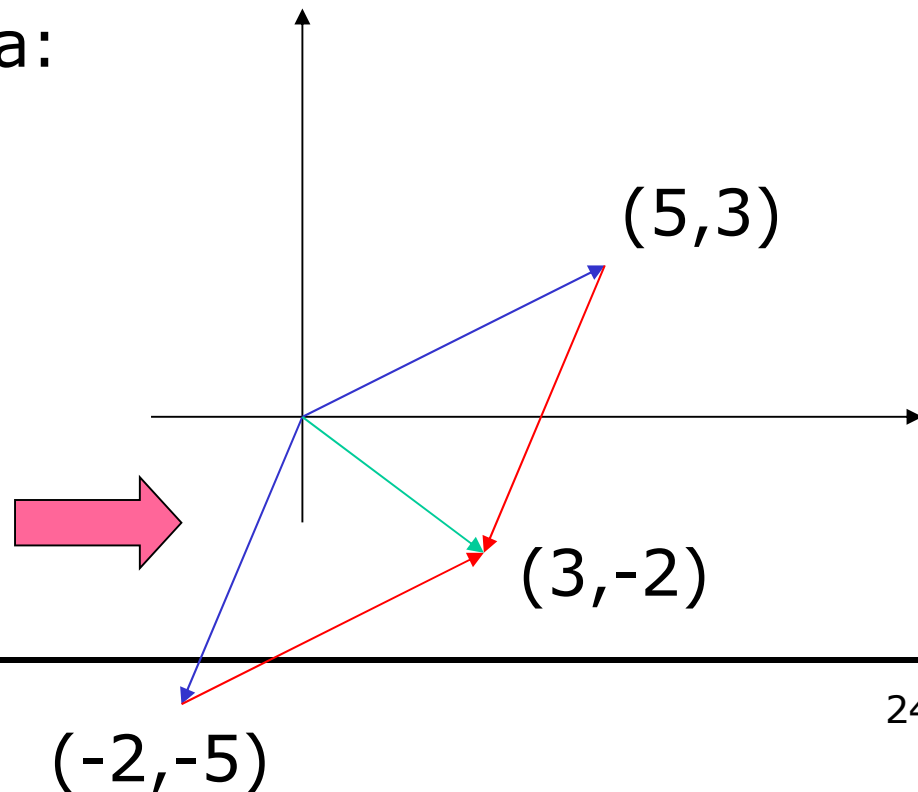


Revisão Matemática - Vetores

- Operações Básicas:
 - Soma de Vetores

Lei do paralelograma:

- Transporta paralelas
- Diagonal=Soma



Revisão Matemática - Vetores

- Operações Básicas:
 - Multiplicação por Escalar

$$\vec{a} = (2,5,6)$$

$$6.\vec{a} = (12,30,36)$$

Revisão Matemática - Vetores

- Combinação Linear
 - Utilizado para splines e representações paramétricas

$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_m\vec{v}_m$, onde $a_1, a_2, \dots, a_m$ são escalares.

Revisão Matemática - Vetores

- Soma de Vetores
 - Propriedades da adição: **a, b, c** (vetores) e k, l (escalares)

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \rightarrow \textit{Comutativa}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \rightarrow \textit{Associativa}$$

$$k(l\vec{a}) = kl\vec{a} \rightarrow \textit{Associativa}$$

$$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a} \rightarrow \textit{Distributiva}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \rightarrow \textit{Distributiva}$$

Com você outra vez...

Sejam $\vec{a} = (2, 4, -3)$, $\vec{b} = (5, -1, 2)$,
 $\vec{c} = (0, 2, -1)$, $k = 5$ e $l = -1$, responda :

$$\vec{a} + \vec{b} =$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) =$$

$$k(l\vec{a}) =$$

$$k\vec{a} + l\vec{a} =$$

$$k\vec{a} + k\vec{b} =$$

Respostas:

Sejam $\vec{a} = (2, 4, -3)$, $\vec{b} = (5, -1, 2)$,
 $\vec{c} = (0, 2, -1)$, $k = 5$ e $l = -1$, responda :

$$\vec{a} + \vec{b} = (7, 3, -1)$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (7, 5, -2)$$

$$k(l\vec{a}) = (-10, -20, 15)$$

$$k\vec{a} + l\vec{a} = \vec{a}(k + l) = (8, 16, -12)$$

$$k\vec{a} + k\vec{b} = \vec{k}(a + b) = (35, 15, -5)$$

Entre Vetores – Produto Escalar

- Produz um escalar $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ e $\vec{w} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n)$,

$$d = \vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \cdot \vec{w}_i$$

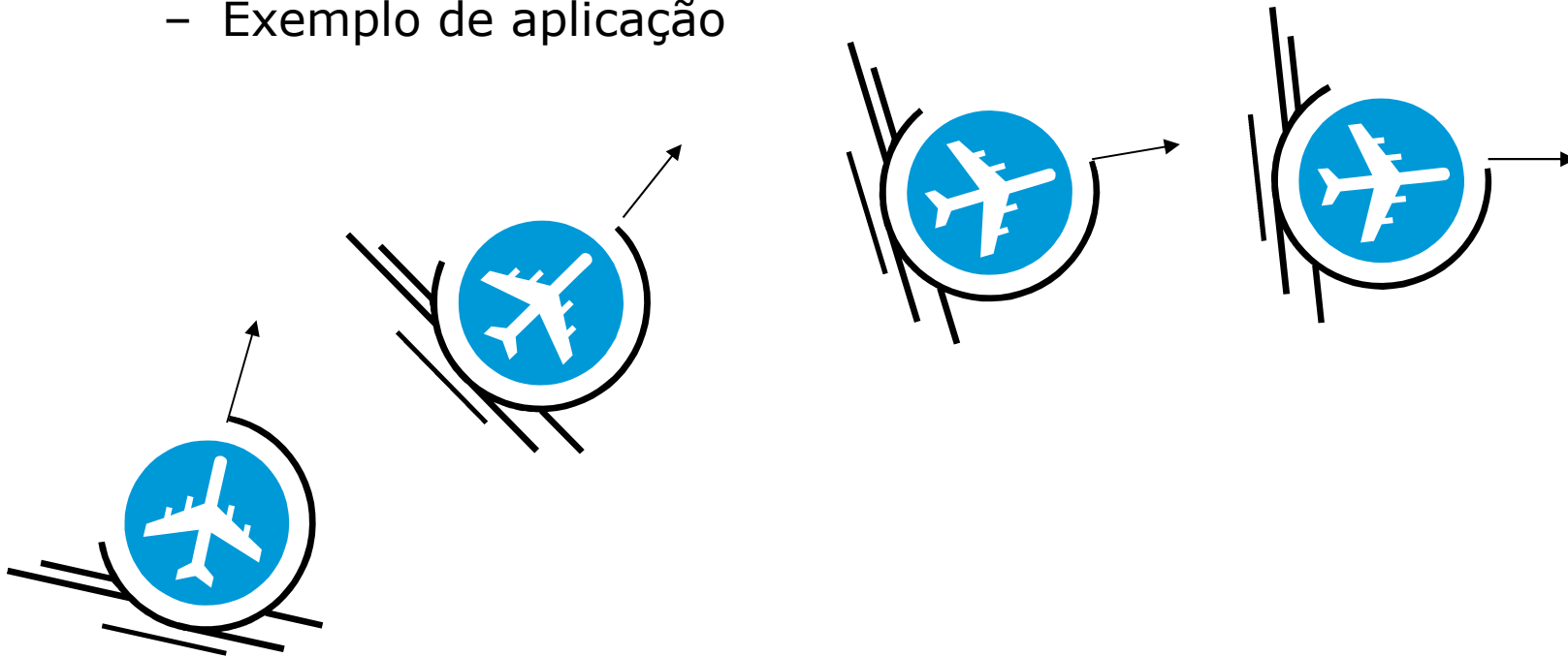
– Ex: $v = (2, 3, 1)$, $w = (0, 4, -1) = 11$

- Propriedades
 - Comutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
 - Distributiva: $(a+c) \cdot b = a \cdot b + c \cdot b$
 - Associativa: $(sa) \cdot b = s(a \cdot b)$
 - Produto Escalar de b com ele mesmo é o quadrado do comprimento de b

$$|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b}$$

Revisão Matemática - Vetores

- Uma aplicação interessante é achar o cosseno do ângulo entre 2 vetores.
 - Exemplo de aplicação

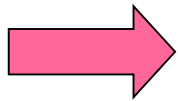


Vetores – Produto Escalar

- Ângulo entre dois vetores (**b** e **c**)
 - Mais importante aplicação do produto escalar

Lei do cosseno :

$$\vec{b} = [bx \ by]$$



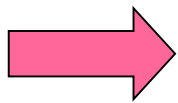
$$bx = |b| \cos \alpha_b \quad by = |b| \sin \alpha_b$$

Vetores – Produto Escalar

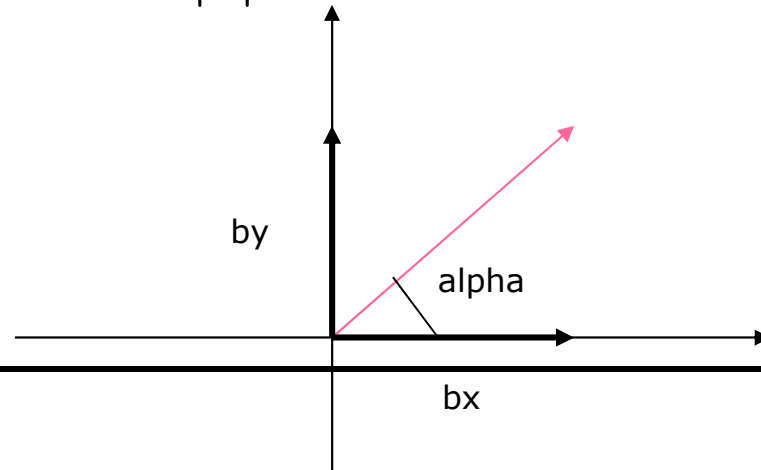
- Ângulo entre dois vetores (**b** e **c**)
 - Mais importante aplicação do produto escalar

Lei do cosseno :

$$\vec{b} = [bx \ by]$$



$$bx = |b| \cos \alpha_b \quad by = |b| \sin \alpha_b$$



Vetores – Produto Escalar

- Ângulo entre dois vetores (**b** e **c**)
 - Mais importante aplicação do produto escalar

Lei do cosseno :

$$\vec{b} = [bx \ by]$$

$$bx = |b| \cos \alpha_b \quad by = |b| \sin \alpha_b$$

$$\vec{b} = (|b| \cos \alpha_b, |b| \sin \alpha_b)$$

$$\vec{c} = (|c| \cos \alpha_c, |c| \sin \alpha_c)$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |b||c| \cos \alpha_c \cos \alpha_b + |b||c| \sin \alpha_c \sin \alpha_b$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |b||c| (\cos \alpha_c \cos \alpha_b + \sin \alpha_c \sin \alpha_b)$$

Vetores – Produto Escalar

- Ângulo entre dois vetores (**b** e **c**)
 - Mais importante aplicação do produto escalar

Lei do cosseno :

$$\vec{b} = [bx \ by]$$

$$bx = |b| \cos \alpha_b$$

$$\vec{b} = (|b| \cos \alpha_b, |b| \sin \alpha_b)$$

$$\vec{c} = (|c| \cos \alpha_c, |c| \sin \alpha_c)$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |b||c| \cos \alpha_c \cos \alpha_b + |b||c| \sin \alpha_c \sin \alpha_b$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |b||c| (\cos \alpha_c \cos \alpha_b + \sin \alpha_c \sin \alpha_b)$$

Como $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$, temos

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |b||c| \cos(\alpha_c - \alpha_b)$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |b||c| \cos \theta \quad (\theta = \text{ângulo entre } b \text{ e } c)$$

$$\cos \theta = \hat{b} \cdot \hat{c}$$

Vetores – Produto Escalar

- Ângulo entre dois vetores (**b** e **c**)
 - Mais importante aplicação do produto escalar

Lei do cosseno :

$$\vec{b} = [bx \ by \ bz]$$

$$bx = |b| \cos \alpha_b$$

$$b = (|b| \cos \alpha_b, |b| \sin \alpha_b)$$

$$c = (|c| \cos \alpha_c, |c| \sin \alpha_c)$$

$$b.c = |b||c| \cos \alpha_c \cos \alpha_b + |b||c| \sin \alpha_b \sin \alpha_c$$

$$b.c = |b||c| (\cos \alpha_c \cos \alpha_b + \sin \alpha_b \sin \alpha_c)$$

Como $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$, temos

$$b.c = |b||c| \cos(\alpha_c - \alpha_b)$$

$$b.c = |b||c| \cos \theta \quad (\theta \rightarrow \text{ângulo entre } b \text{ e } c)$$

$$\cos \theta = \hat{b} \cdot \hat{c}$$

O cosseno do ângulo entre dois vetores é o produto escalar destes vetores normalizados

Para você fazer...

- Calcule o ângulo entre os vetores:

$$b = (3,4) \text{ e } c = (5,2)$$

Vetores – Produto Escalar

- Ex: $b = (3,4)$ e $c = (5,2)$
 $|b| = 5, |c| = 5.385$
 $\hat{b} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \hat{c} = (0.9285, 0.3714)$
 $\hat{b} \cdot \hat{c} = 0.85422 = \cos \theta = 31.325^\circ (\text{degrees})$
 $= 0,54 (\text{radianos})$
- Conversão de graus em radianos e radianos em graus? $180 \text{ graus} = 3,1416 \text{ radianos}$

Vetores – Produto Escalar

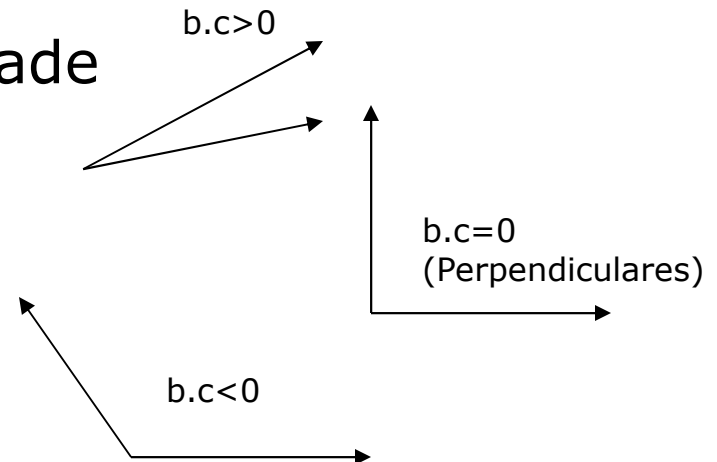
- Ex: $b = (3,4)$ e $c = (5,2)$
 $|b| = 5, |c| = 5.385$
 $\hat{b} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \hat{c} = (0.9285, 0.3714)$
 $\hat{b} \cdot \hat{c} = 0.85422 = \cos \theta = 31.325^\circ$

- Sinal de $b \cdot c$ e Perpendicularidade

$$\cos \theta > 0 \text{ se } |\theta| < 90^\circ \rightarrow b \cdot c > 0$$

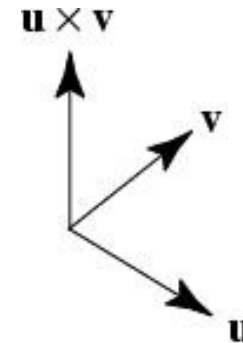
$$\cos \theta = 0 \text{ se } |\theta| = 90^\circ \rightarrow b \cdot c = 0$$

$$\cos \theta < 0 \text{ se } |\theta| > 90^\circ \rightarrow b \cdot c < 0$$



Vetores – Produto Vetorial

- Produz como resultado um vetor perpendicular aos dois vetores operandos
- Válido para 3D



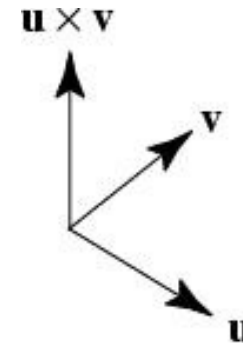
$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad a \times b$$

$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y)i + (a_z b_x - a_x b_z)j + (a_x b_y - a_y b_x)k$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

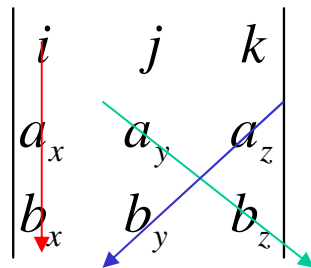
Vetores – Produto Vetorial

- Produz como resultado um vetor perpendicular aos dois vetores operandos
- Válido para 3D



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad a \times b$$

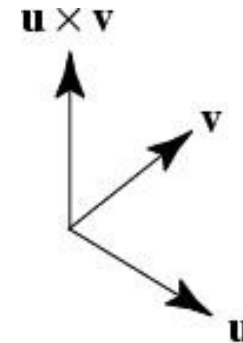
$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y)i + (a_z b_x - a_x b_z)j + (a_x b_y - a_y b_x)k$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} \textcolor{red}{i} & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$


$$(a_y b_z - a_z b_y)i$$

Vetores – Produto Vetorial

- Produz como resultado um vetor perpendicular aos dois vetores operandos
- Válido para 3D



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad a \times b$$

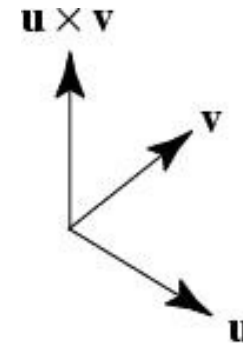
$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y)i + (a_z b_x - a_x b_z)j + (a_x b_y - a_y b_x)k$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &-(a_x b_z - a_z b_x)j \\ &(-a_x b_z + a_z b_x)j \\ &(a_z b_x - a_x b_z)j \end{aligned}$$

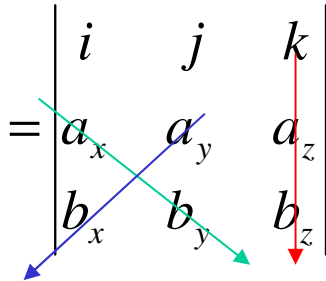
Vetores – Produto Vetorial

- Produz como resultado um vetor perpendicular aos dois vetores operandos
- Válido para 3D



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad a \times b$$

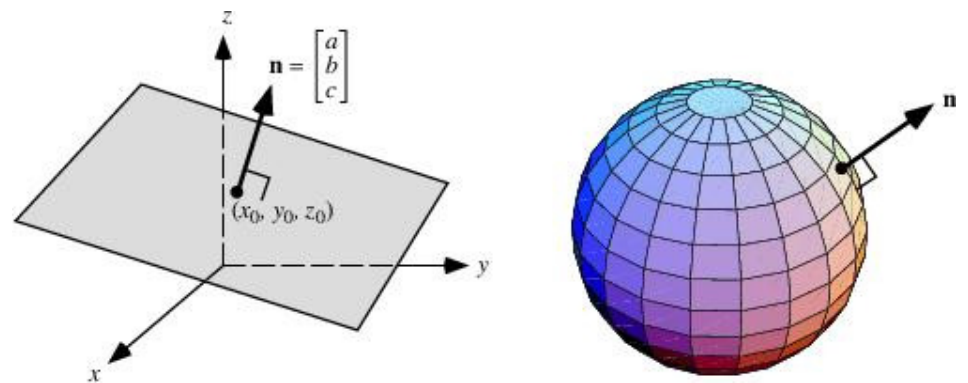
$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y)i + (a_z b_x - a_x b_z)j + (a_x b_y - a_y b_x)k$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$


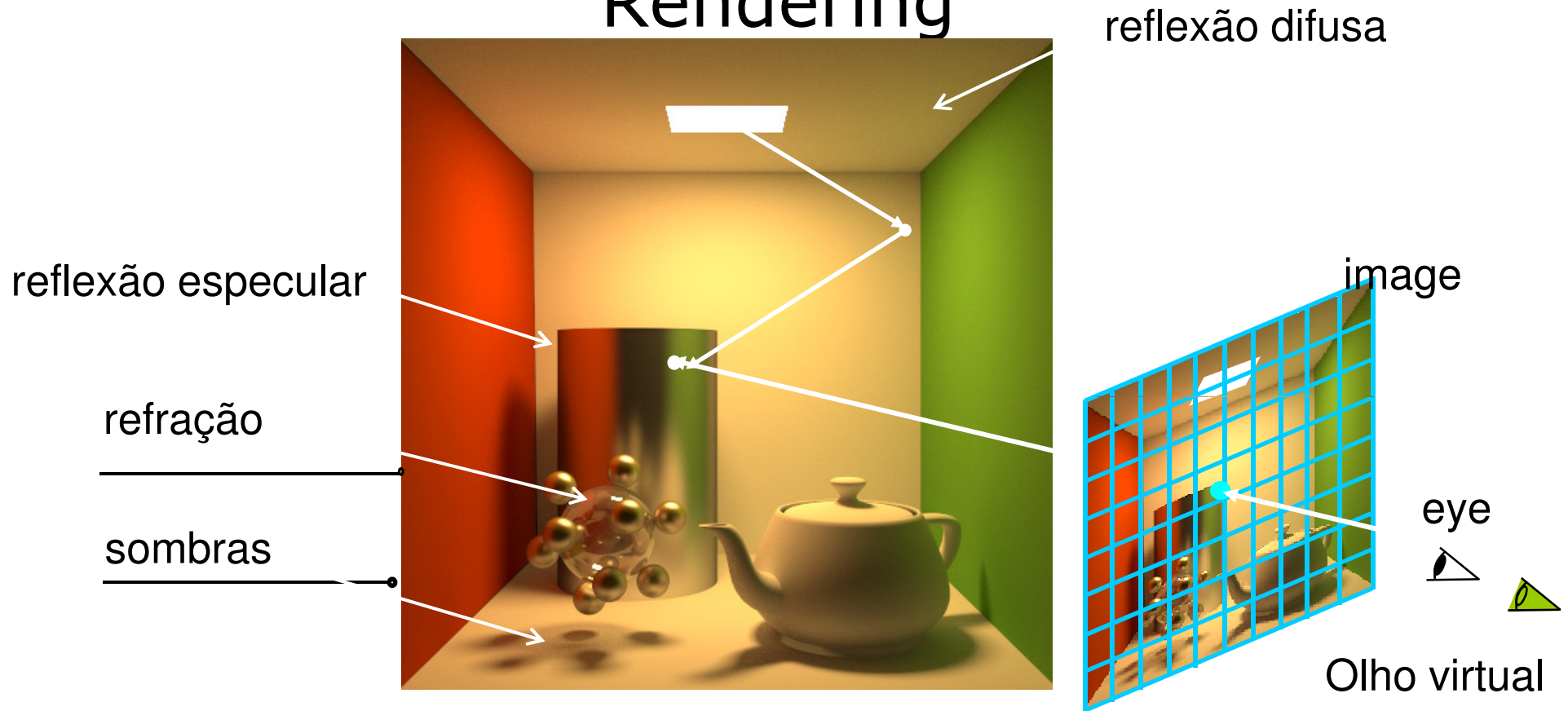
$$(a_x b_y - a_y b_x)k$$

Vetores – Produto Vetorial

- Normal de um Plano
 - **Importante aplicação do produto vetorial**
 - P1, P2 e P3 sempre determinam um plano
 - $a = P2 - P1$
 - $b = P3 - P1$
 - $a \times b = \text{Vetor normal ao plano}$



Rendering



Principais fenômenos que podem acontecer na interação entre luz e objetos

Matrizes

- Arranjo retangular de elementos
- Matriz com m linhas e n colunas é dita matriz mxn
- Matriz Quadrada: m=n
 - Exemplo (2x2, 3x3, 4x4)
- Matriz Identidade:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Vetor Linha: 1xn
- Vetor Coluna: nx1

$$L = (1 \quad 1 \quad 1)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrizes - Operações

- Scale:

- Multiplica cada elemento da Matriz por um fator de escala

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 8 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \\ 1 & 21 & 2 \end{pmatrix} = 4 \times 3$$

$$6A = \begin{pmatrix} 18 & 12 & -30 \\ -6 & 48 & 0 \\ 36 & 18 & 54 \\ 6 & 126 & 12 \end{pmatrix}$$

- Soma:

- Se duas matrizes têm o mesmo número de linhas e colunas, elas podem ser somadas (mesma forma)

$$A + 6A = \begin{pmatrix} 21 & 14 & -35 \\ -7 & 56 & 0 \\ 42 & 21 & 63 \\ 7 & 147 & 14 \end{pmatrix}$$

- Matriz Transposta:

- Troca linhas por colunas

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 21 \\ -5 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix} = 3 \times 4$$

Matrizes - Operações

- Produto:

- Definido somente se matrizes são conformes

- Número de colunas de $A(m \times n)$ = Número de linhas de $B(n \times p)$,
resultando em matrix C que será de dimensão $(m \times p)$

$$Ex: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & -3 \\ 8 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ 11 & 13 \\ 11 & 20 \end{pmatrix}$$

- Propriedades (A, B, C são conformes)

- $(AB)C = A(BC)$
 - $A(B+C) = AB+AC$
 - $(A+B)C = AC+BC$
 - $(AB)^T = B^T A^T$

Matrizes - Operações

- Produto:
 - Definido somente se matrizes são conformes
 - Número de colunas de A(mxn) = Número de linhas de B(nxp),
resultando em matrix C que será de dimensão (m xp)

$$Ex: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & -3 \\ 8 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & -14 \\ 35 & 13 \\ 11 & 20 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot 6 + 0 \cdot -1 + 6 \cdot 3 + -3 \cdot -5 = 12 + 0 + 18 + 15 = 45$$

$$2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + -3 \cdot 8 = 4 + 0 + 6 - 24 = -14$$

$$8 \cdot 6 + 1 \cdot -1 + -4 \cdot 3 + 0 \cdot -5 = 48 - 1 - 12 + 0 = 35$$

$$8 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + -4 \cdot 1 + 0 \cdot 8 = 16 + 1 - 4 + 0 = 13$$

$$0 \cdot 6 + 5 \cdot -1 + 7 \cdot 3 + 1 \cdot -5 = 0 - 5 + 21 - 5 = 11$$

$$0 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 8 = 0 + 5 + 7 + 8 = 20$$

Vamos trabalhar de novo? 😊

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Resultado:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

De novo? $AB=C$
Calcule C

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Resultado

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 23 & 8 & 25 \end{pmatrix}$$