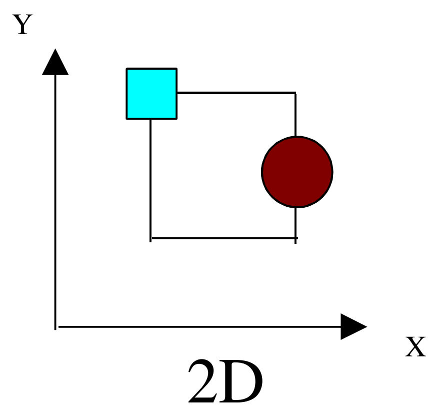
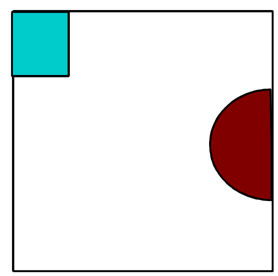
Transformações 2D

Soraia Raupp Musse

Pipeline de Visualização

- Em 2D as coisas são mais simples que em 3D
  - Simplesmente especificar uma janela do mundo 2D e uma viewport na superfície de visualização
- A complexidade começa em 3D, pelo fato de termos uma dimensão a mais, mas também pelo fato do dispositivo de exibição ser 2D





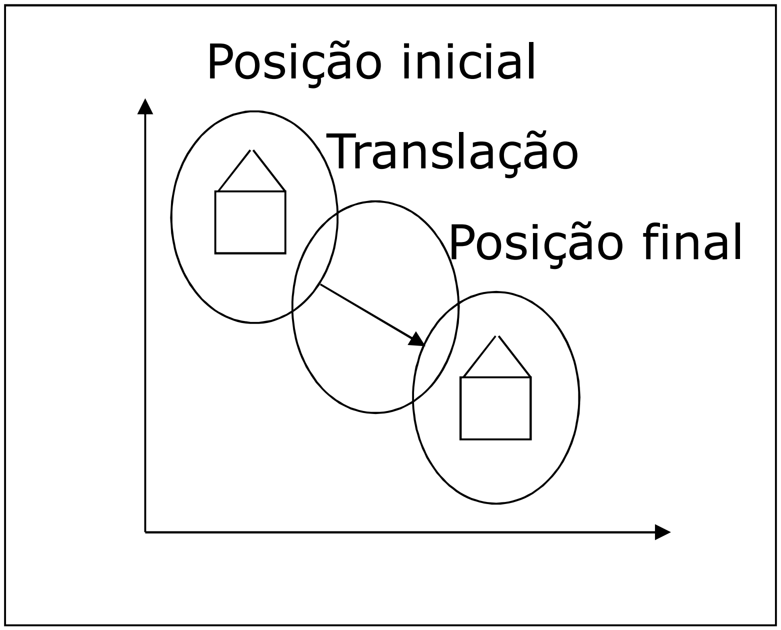
Pipeline 2D

- SRO
- SRU
- SRW

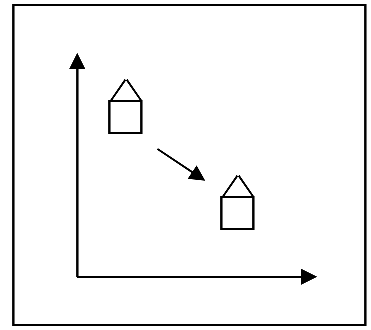
(recorte 2D)

- SRV
- SRD

Transformações 2D - Translação



Transformações 2D - Translação



- Cada vértice é modificado

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

- Utiliza-se vetores para representar a transformação

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} tx \\ ty \end{bmatrix}$$

- Um ponto ***p(x,y)*** torna-se um vetor

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

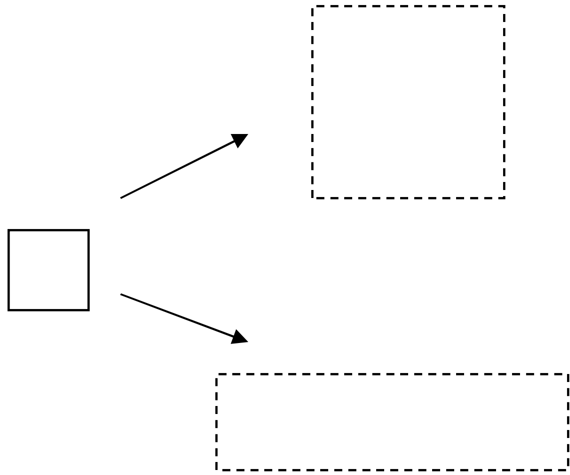
- Assim, a translação torna-se uma mera soma de vetores

$$\boxed{\vec{p}' = \vec{p} + \vec{t}}$$

Transformações 2D - Escala

- Coordenadas são multiplicadas pelos fatores de escala

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x.s_x \\ y' &= y.s_y \end{aligned}}$$

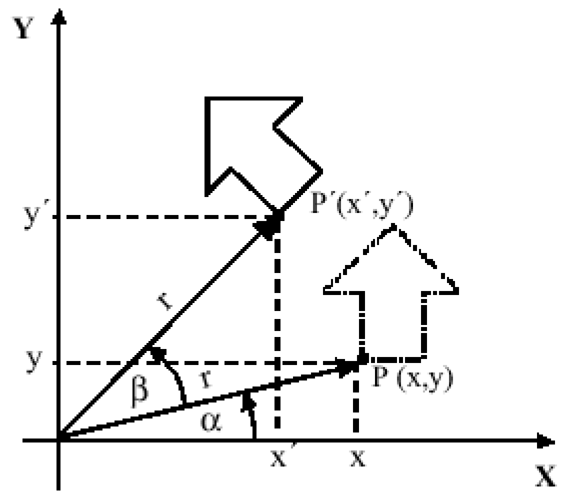


- Tipos de Escala
  - Uniforme:
    - sx = sy
  - Não-Uniforme
    - sx <> sy
- Escala é uma multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x.s_x + 0.y \\ 0.x + y.s_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x.s_x \\ y.s_y \end{bmatrix}$$

Transformações 2D - Rotação

- Como chegar à matriz de rotação?

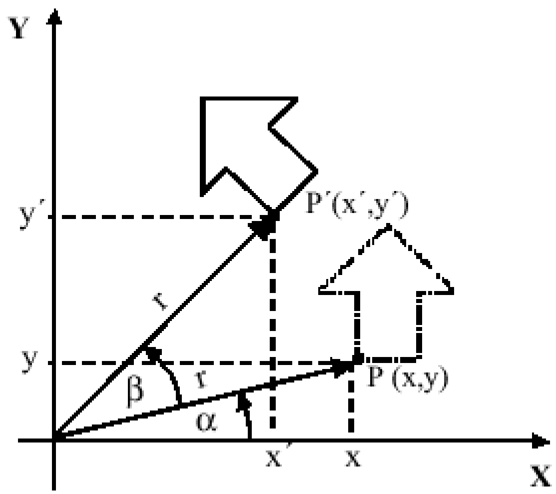


Transformações 2D - Rotação

- Como chegar à matriz de rotação?

$$x = r.\cos\alpha \qquad y = r.\sin\alpha$$

$$x' = r.\cos(\alpha+\beta) \qquad y' = r.\sin(\alpha+\beta)$$



Transformações 2D - Rotação

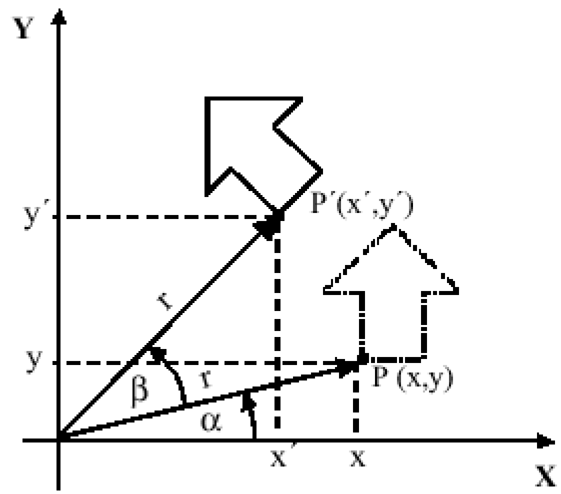
- Como chegar à matriz de rotação?

$$x = r.\cos\alpha \qquad y = r.\sin\alpha$$

$$x' = r.\cos(\alpha+\beta) \qquad y' = r.\sin(\alpha+\beta)$$

$$x' = r.\cos\alpha.\cos\beta - r.\sin\alpha.\sin\beta$$

$$y' = r.\cos\alpha.\sin\beta + r.\cos\alpha.\sin\beta$$



$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\sin\beta + \sin\alpha.\cos\beta \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta\end{array}}$$

Transformações 2D - Rotação

- Como chegar à matriz de rotação?

$$x = r.\cos\alpha \qquad y = r.\sin\alpha$$

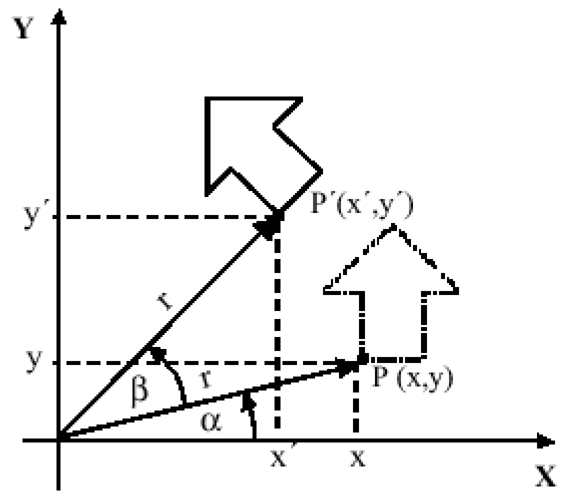
$$x' = r.\cos(\alpha+\beta) \qquad y' = r.\sin(\alpha+\beta)$$

$$x' = r.\cos\alpha.\cos\beta - r.\sin\alpha.\sin\beta$$

$$y' = r.\cos\alpha.\sin\beta + r.\cos\alpha.\sin\beta$$

$$x' = x.\cos\beta - y.\sin\beta$$

$$y' = x.\sin\beta + y.\cos\beta$$

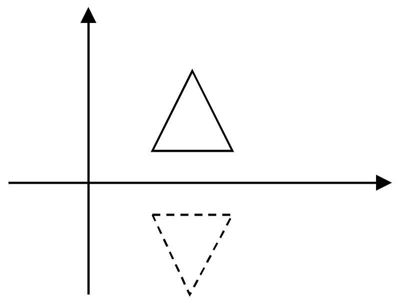


$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha.\sin\beta + \sin\alpha.\cos\beta\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta\end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

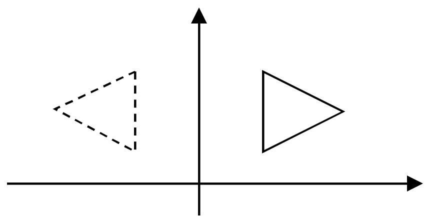
Transformações 2D – Reflexão

- Ocorre ao longo de uma linha
- Ao longo do eixo X



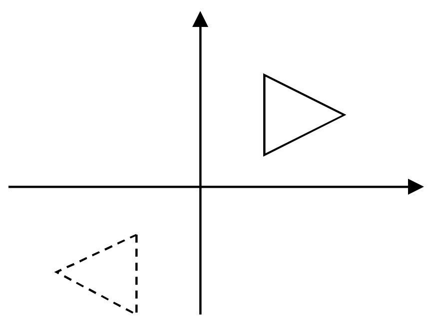
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

- Ao longo do eixo Y



$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

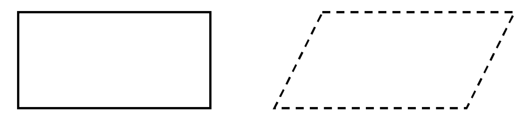
- Ao longo dos 2 eixos: XY



$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

Transformações 2D – Deslizamento

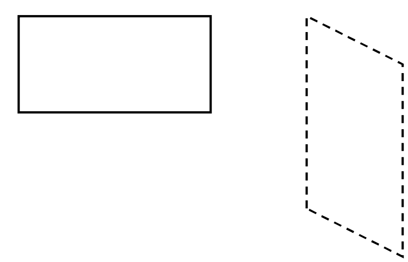
- Shearing é uma transformação que distorce o objeto



- Distorção na direção x

$$\begin{bmatrix} 1 & Sh_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + Sh_x . y \\ y \end{bmatrix}$$

- Distorção na direção y



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Sh_y & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ Sh_x . x + y \end{bmatrix}$$

Resumo Transformações 2D

- Applet – Transformações 2D
- Notação Vetor-Matriz simplifica escrita
  - Translação expressa como uma soma de vetores
  - Escala e Rotação expressas como multiplicação Matriz-Vetor
- Porém, é interessante uma notação uniforme e consistente
  - Permitir que se expresse as três operações de maneira idêntica
  - Permitir que se expresse a combinação destas três operações também de maneira idêntica
- Como fazer isso?

Matriz Transformação

- Produzir uma matriz que seja o resultado da multiplicação das transformações a serem aplicadas no objeto
- Problema: Todas as operações básicas devem ser escritas em forma matricial
- Para isto, escreva as notações matriciais das transformações:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x.s_x \\ y' &= y.s_y \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} x' &= x.\cos\beta - y.\sin\beta \\ y' &= x.\sin\beta + y.\cos\beta \end{aligned} \qquad \boxed{\begin{aligned} x' &= x + t_x \\ y' &= y + t_y \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x.s_x + 0.y \\ 0.x + y.s_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x.s_x \\ y.s_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta.x - \sin\beta.y \\ \sin\beta.x + \cos\beta.y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{tx}{y} \\ \frac{ty}{x} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x.1 + \frac{tx}{y}.y \\ x.\frac{ty}{x} + 1.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + tx \\ y + ty \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

- Introduzida em Matemática
- Adiciona uma terceira coordenada *w*
- Um ponto 2D passa a ser um vetor com 3 coordenadas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

- 2 pontos são iguais se e somente se:

$$\frac{x'}{w'} = \frac{x}{w} \text{ e } \frac{y'}{w'} = \frac{y}{w}$$

- Homogeneizar: dividir por w
- Pontos homogeneizados:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translação – Coord. Homogêneas

$$\boxed{\vec{p}' = \vec{p} + \vec{t}}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x + wt_x \\ y' = y + wt_y \\ w' = w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{w'} = \dfrac{x}{w} + t_x \\[2ex] \dfrac{y'}{w'} = \dfrac{y}{w} + t_y \end{cases}$$

Escala – Coord. Homogêneas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = s_x x \\ y' = s_y y \\ w' = w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{w'} = s_x \dfrac{x}{w} \\[2ex] \dfrac{y'}{w'} = s_y \dfrac{y}{w} \end{cases}$$

Rotação – Coord. Homogêneas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{x'}{w'} = \cos\theta \frac{x}{w} - \sin\theta \frac{y}{w} \\ \frac{y'}{w'} = \sin\theta \frac{x}{w} + \cos\theta \frac{y}{w} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \cos\theta x - \sin\theta y \\ y' = \sin\theta x + \cos\theta y \\ w' = w \end{cases}$$

Composição de Transformações

- Para realizar composição de transformações, basta efetuar uma multiplicação de matrizes
  - Ex: Composição de uma rotação e uma translação
    - M = R.T
- Rotação ao redor de um ponto Q:
  - translada Q para origem ($\mathbf{T}_Q$),
  - rotaciona ao redor da origem ($\mathbf{R}_\Theta$)
  - translada de volta para Q ($\mathbf{-\ T}_Q$).

$$P' = \mathbf{(-T}_Q\mathbf{)R}_\Theta \mathbf{T}_Q\, P$$

Composição de Transformações

- Observações
  - Multiplicação de Matrizes não é comutativa
  - Ordem das operações influencia diretamente
    - Rotação seguida de translação é muito diferente de translação seguida de rotação.

Matriz de Transformação

Multiplicação de todas as matrizes que compõem as operações a serem sofridas pelo(s) objeto(s).

Animação

T1=(tx1,ty1) T8=(tx8,ty8)

$$dx = tx8 - tx1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta x = \frac{dx}{number\_of\_frames}$$

$$\Delta y = \frac{dy}{number\_of\_frames}$$

Animação

S1=(sx1,sy1)

$$Sx = S8 - S1$$

$$\begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

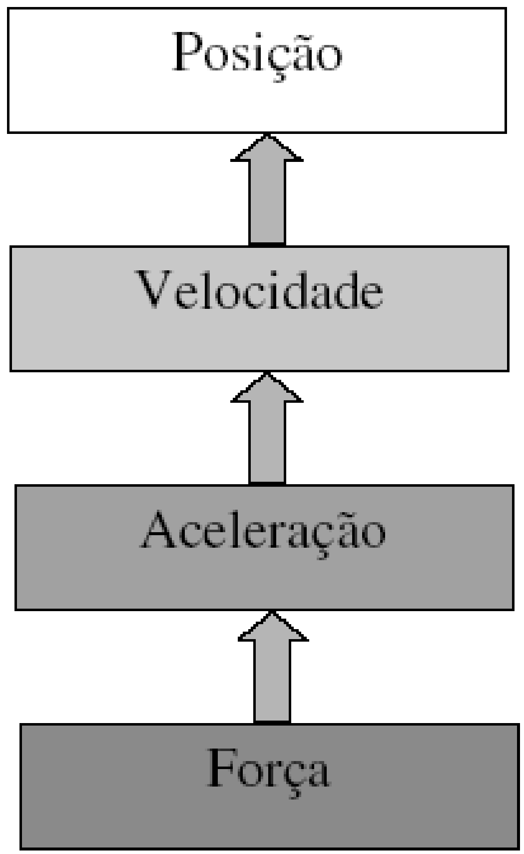
S8=(sx8,sy8)

$$\Delta x = \frac{Sx}{number\_of\_frames}$$

$$\Delta y = \frac{Sy}{number\_of\_frames}$$

Física

- Animação → Mudança da Posição ao longo do tempo:



$\mathbf{x} = (x, y)$

$\mathbf{v} = (v_x, v_y)$

$x = x_0 + v.dt$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}}$$

$\mathbf{a} = (a_x, a_y)$

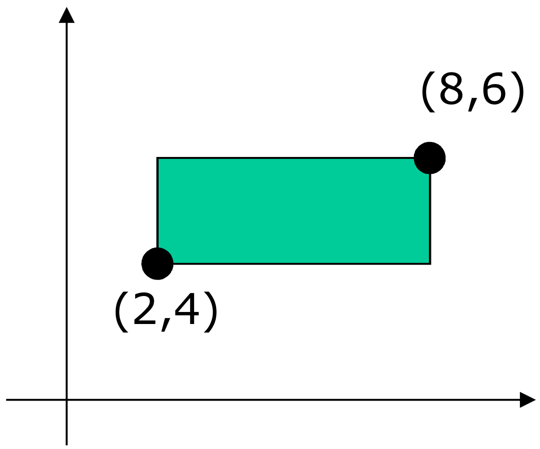
$v = v_0 + a.dt$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{x}}$$

$\mathbf{F} = m.\mathbf{a}$

Exercício:

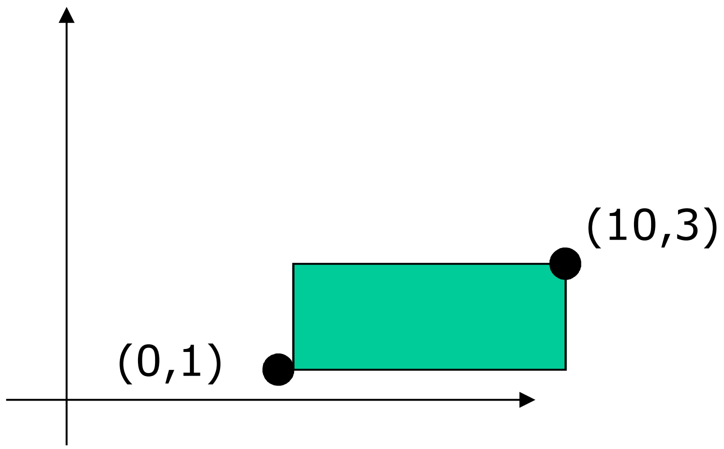
- Translade em (2,-3) a figura abaixo:



- Quais as coordenadas dos 4 vértices da figura transladada?

Resposta:

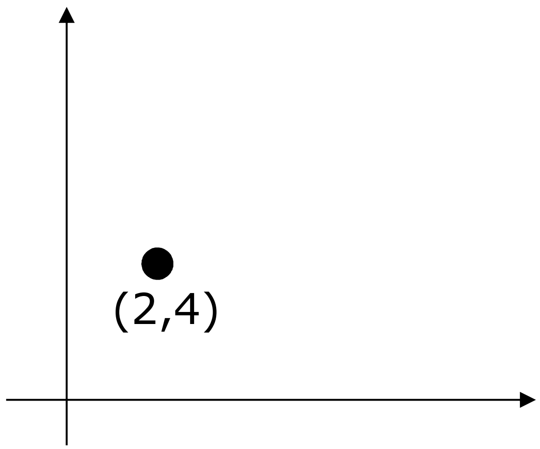
- Translade em (2,-3) a figura abaixo:



- Quais as coordenadas dos 4 vértices da figura transladada? (4,1), (4,3), (10,3) e (10,1)

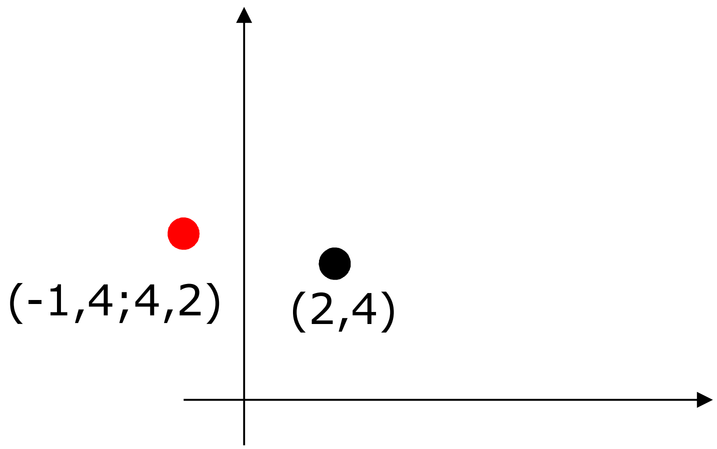
Exercício:

- Monte a matriz e rotacione em (45 graus) o ponto abaixo:



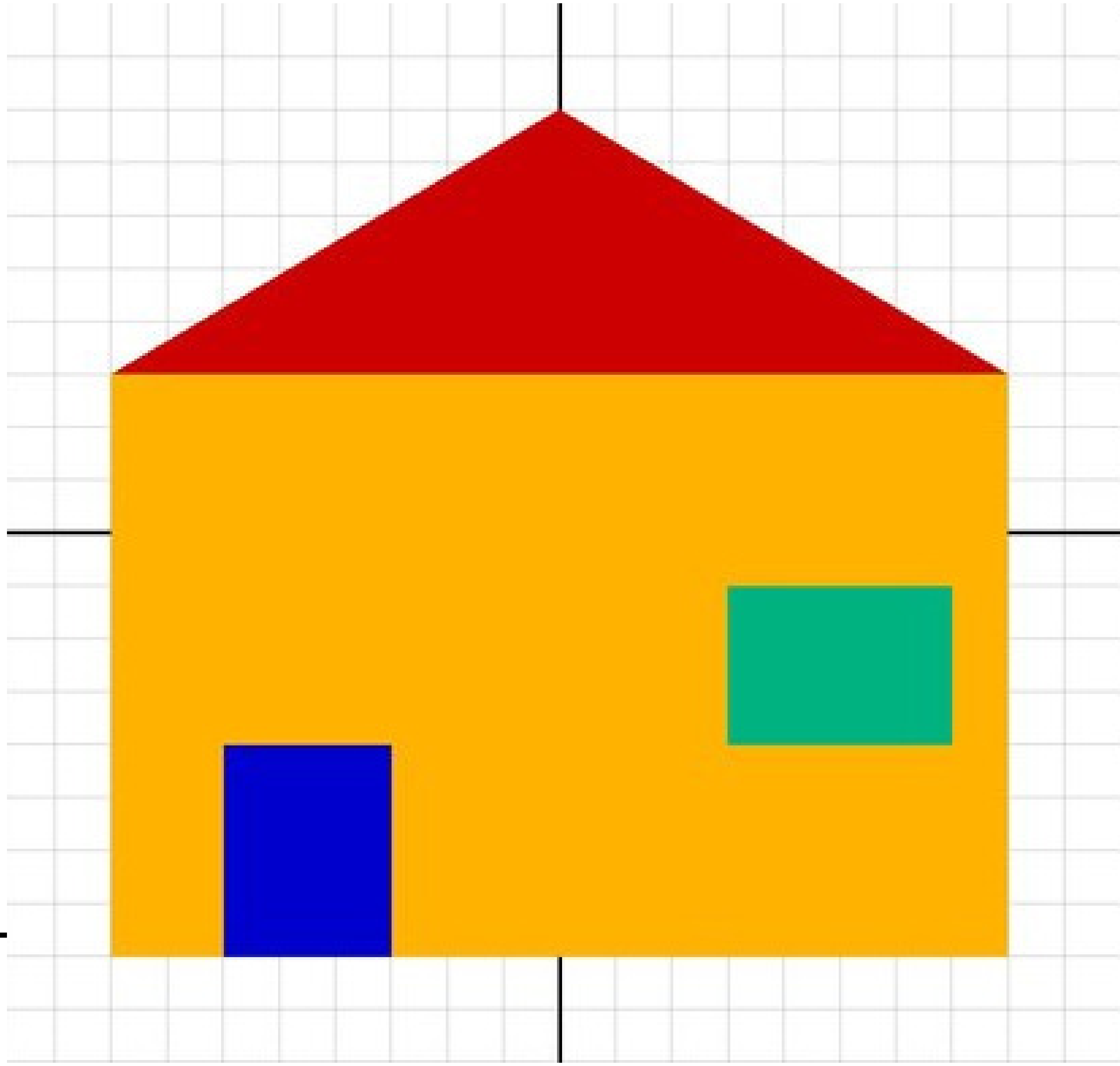
Resposta:

- Monte a matriz e rotacione em (45 graus) o ponto abaixo:

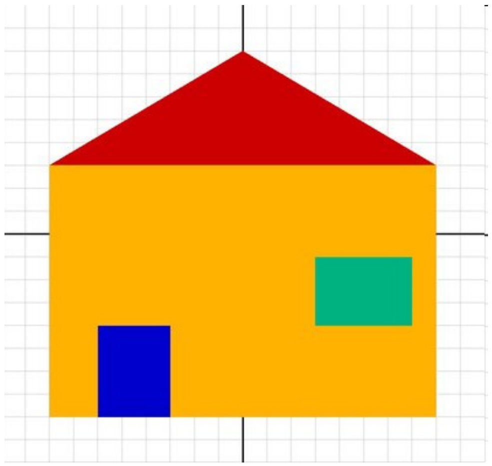


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Instanciamento: Coordenadas



Instanciamento: Coordenadas



Considere que todas as figuras geométricas necessárias na casinha tem coordenadas do seu vértice inicial (esq-abaixo) como (0,0).
Considere que a escala e rotação estão ok,
Quais operações devem ser feitas para modelar a casa acima?