Matemática para CG

Soraia Raupp Musse

Sumário

- Introdução
- Revisão Matemática
  - Vetores
  - Matrizes

Introdução

- Em CG, trabalha-se com objetos definidos em um mundo 3D
- Todos os objetos têm forma, posição e orientação
- Precisamos de programas de computador que descrevam esses objetos e como a luz interage com eles, de forma que o valor do pixels possam ser computados

Introdução

- Dois conceitos matemáticos ajudam enormemente em CG:
  - Análise e álgebra vetorial
  - Transformações

- Com estas duas diciplinas saberemos:
  - Como descrever os objetos geométricos de uma cena
  - Como converter idéias geométricas para números

- Como resultado tem-se uma coleção de algoritmos úteis em CG

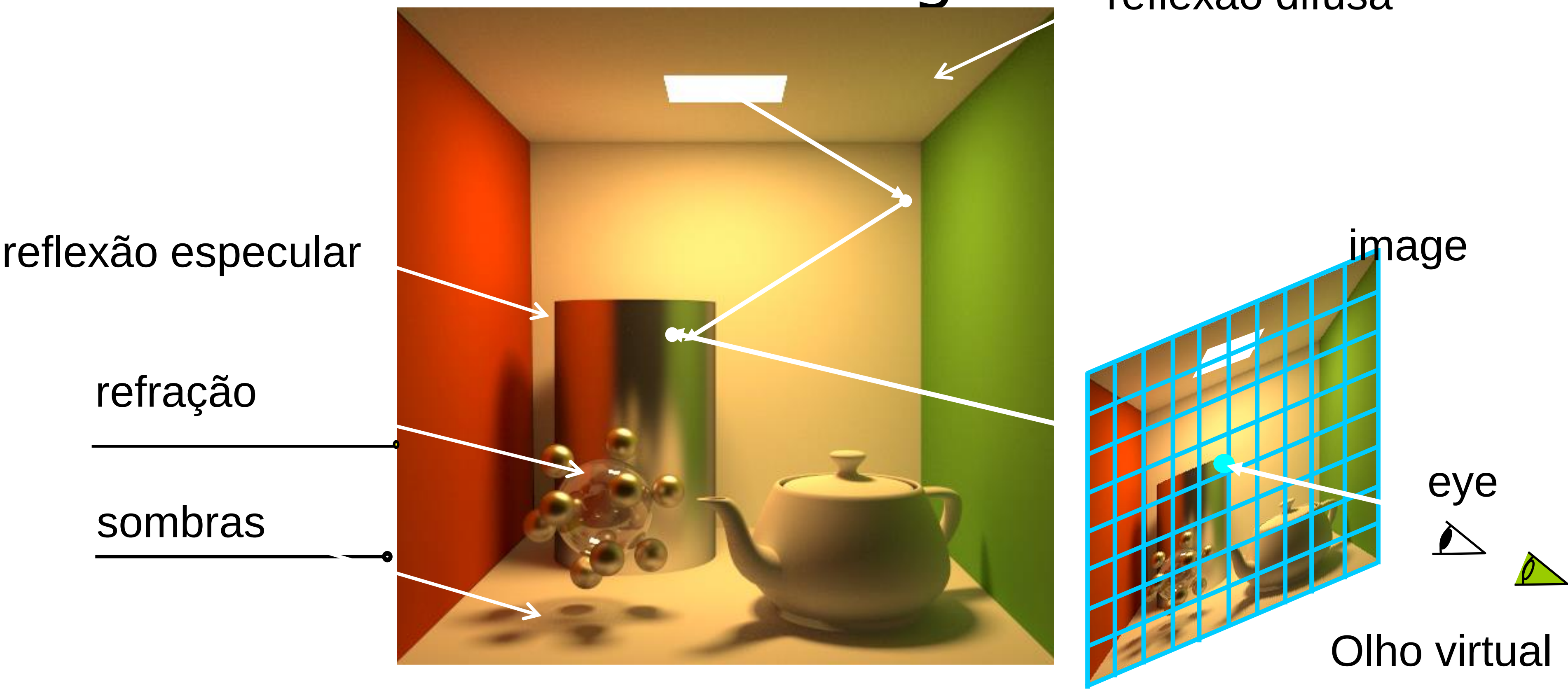
Revisão Matemática - Vetores

- Por que vetores são tão importantes para CG?
  - Utilizados para resolver problemas que seriam dificilmente resolvidos via outro método
  - Aritmética vetorial provê uma maneira unificada de se expressar idéias geométricas algebricamente
  - Ray-Tracing

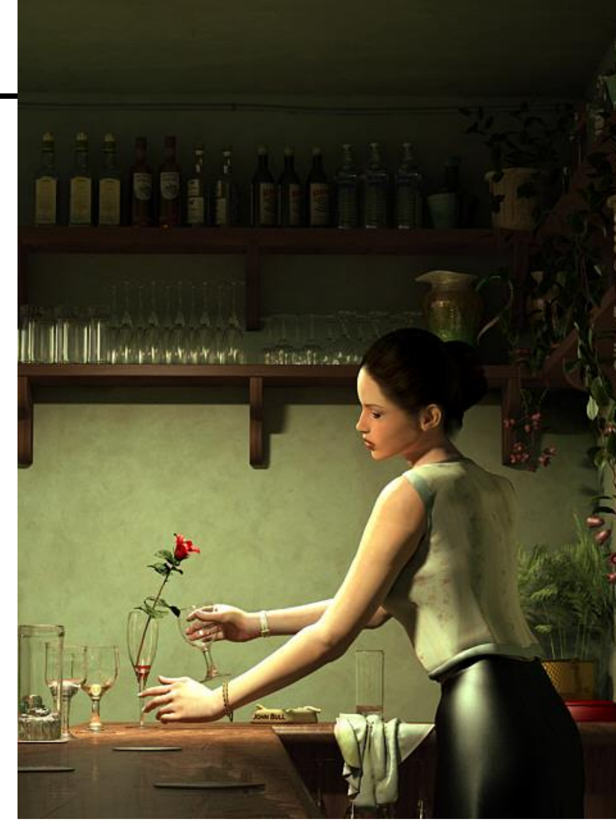
Exemplos – Ray-Tracing

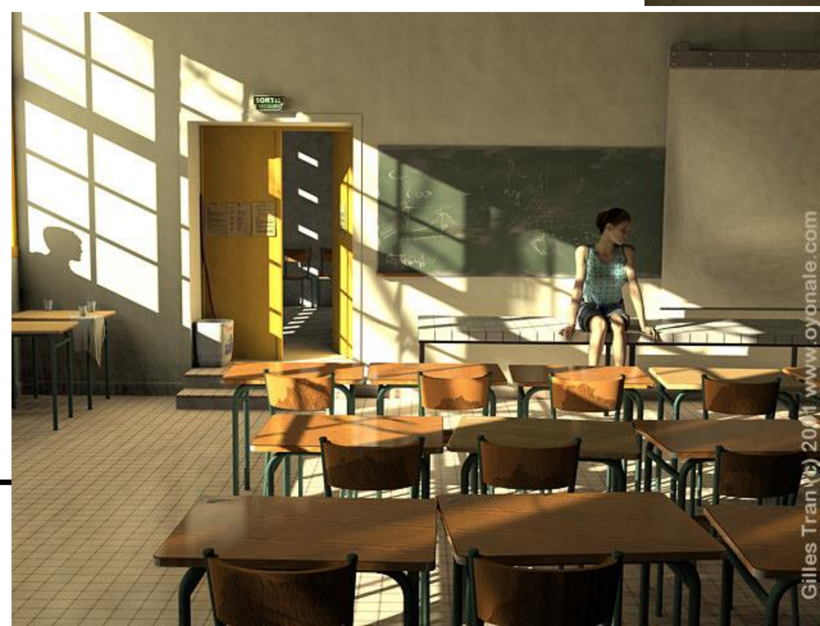
Fonte: www.povray.org

Rendering



Principais fenômenos que podem acontecer na interação entre luz e objetos

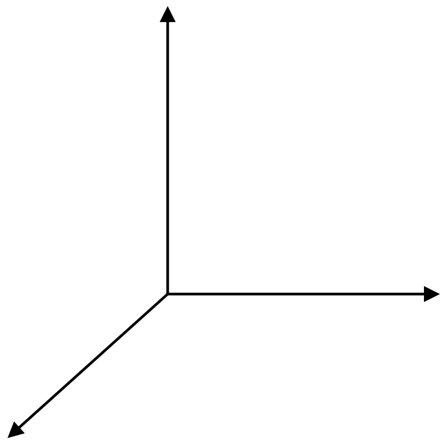


Gilles Tran © 2003 www.oyonale.com

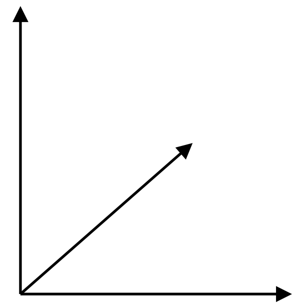

Gilles Tran (c) 2001 www.oyonale.com

Exemplos – Ray-Tracing

Revisão Matemática - Vetores

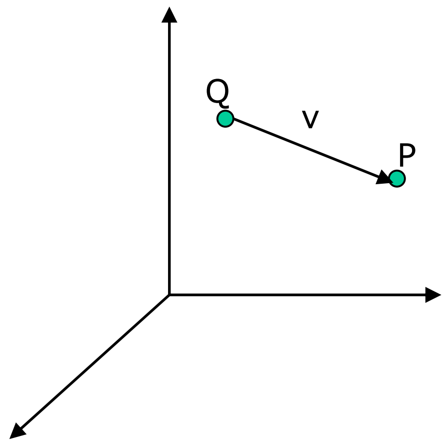
- SRs mão direita e mão esquerda





Revisão Matemática - Vetores

- Geometricamente, vetores são objetos com comprimento e direção
- Podem representar diversas entidades físicas, como força e velocidade
- Notação matemática (seta ou bold)



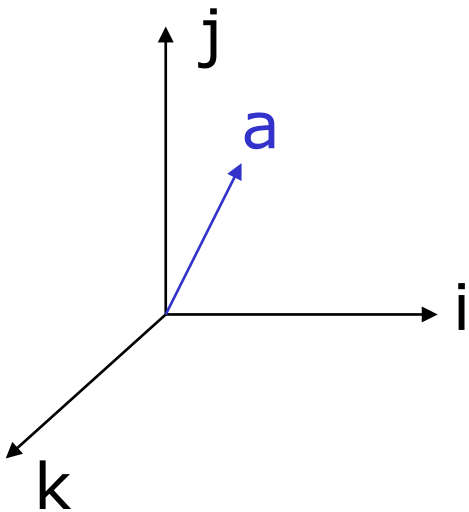
$$\vec{v} = P - Q \text{ (Diferença de dois pontos é um vetor)}$$

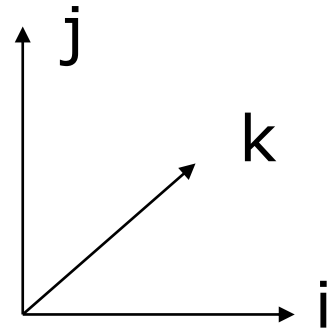
$$Q + \vec{v} = P \text{ (Ponto + vetor = Ponto)}$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ (Vetor n-dimensional)}$$

- Applet http://www.fisica.ufpb.br/prolicen/applets.html

Vetores Especiais





$$\vec{a} = [axi\ ayj\ azk]$$

$$\vec{a} = axi + ayj + azk$$

Vetores – Produto Escalar

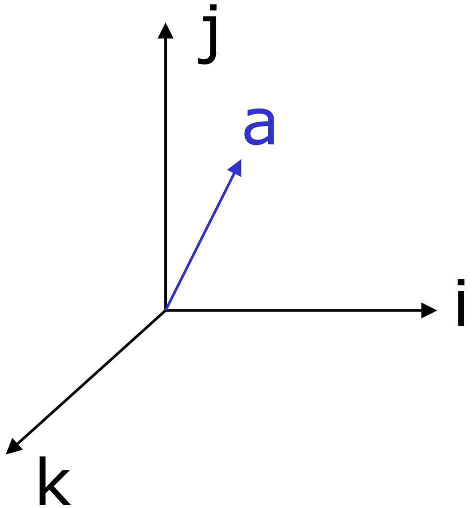
- Vetores unitários padrões

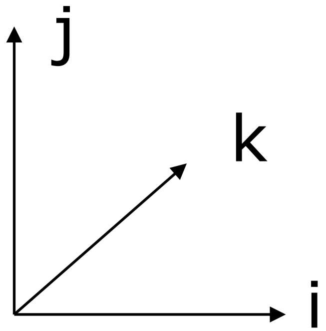
$$\vec{i} = (1,0,0),\ \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$$

$$(a,b,c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$\text{Ex}: \vec{v} = (2,5,-1) = 2(1,0,0) + 5(0,1,0) - 1(0,0,1) = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 1\vec{k}$$

Revisão Matemática - Vetores





Inversão de vetores: MULT(-1)

$$\vec{a} = \left[axi \; ayj \; azk \right]$$

$$\vec{a} = axi + ayj + azk$$

$$-1.\vec{a} = -axi - ayj - azk$$

Como ficaria -1.**a?**

Revisão Matemática - Vetores

- Magnitude, tamanho (sempre positivo) ou <u>módulo do vetor DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS</u>

$$\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m)$$

$$|v| = \sqrt{\vec{v}_1^{\,2} + \vec{v}_2^{\,2} + \ldots + \vec{v}_m^{\,2}}$$

$\Rightarrow$ Dedução matemática!!!

Revisão Matemática - Vetores

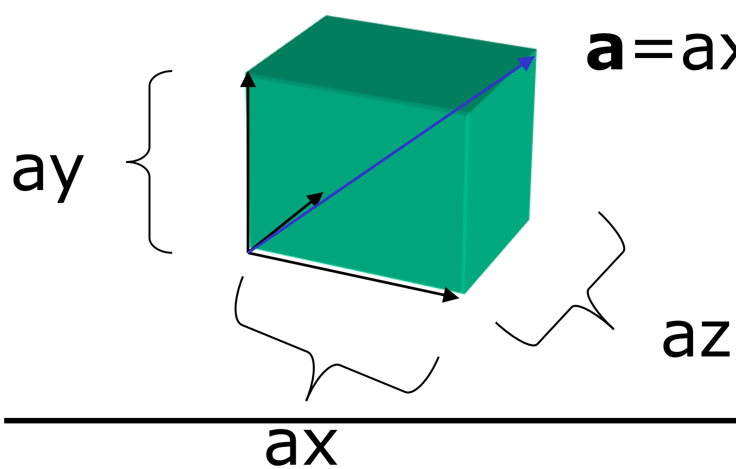
- Magnitude, tamanho (sempre positivo) ou <u>módulo do vetor</u> <u>DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS</u>

$$\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m)$$

$$|v| = \sqrt{\vec{v}_1^{\,2} + \vec{v}_2^{\,2} + \ldots + \vec{v}_m^{\,2}}$$

- Origem em Pitágoras

a=axi+ayj+azk



Revisão Matemática - Vetores

- Magnitude, tamanho (sempre positivo) ou <u>módulo do vetor</u> <u>DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS</u>

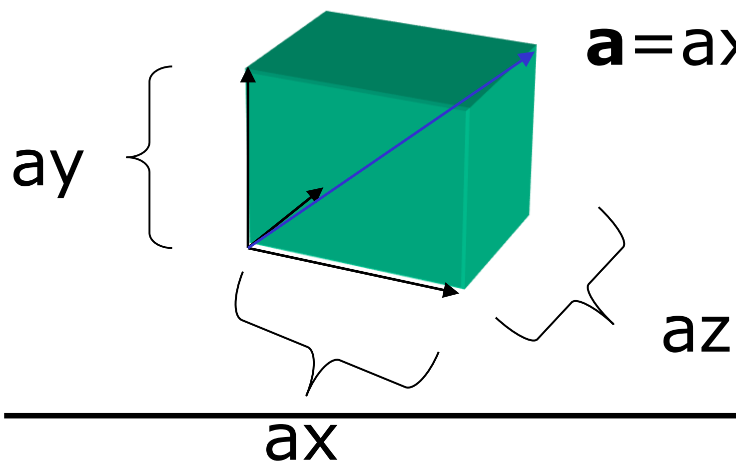
$$\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m)$$

$$|v| = \sqrt{\vec{v}_1^{\,2} + \vec{v}_2^{\,2} + \ldots + \vec{v}_m^{\,2}}$$

- Origem em Pitágoras

$$h^2 = l_1^{\,2} + l_2^{\,2} + l_3^{\,2}$$

a=axi+ayj+azk



$$|a| = \sqrt{ax^2 + ay^2 + az^2}$$

Revisão Matemática - Vetores

- Vetor Unitário (magnitude = 1)
  - Algumas vezes é interessante normalizar um vetor, tornando-o unitário

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left[\frac{ax}{|\vec{a}|} \; \frac{ay}{|\vec{a}|} \; \frac{ax}{|\vec{a}|} \right]$$

$$\text{Ex}: \vec{a} = (3,-4), |a| = 5 \text{ e } \hat{a} = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right), \; |\hat{a}| = 1$$

Para você fazer:

Sendo $\vec{a} = (2, -3)$, calcule (escreva com a notação matemática):

Módulo de a:

Vetor unitário a:

Módulo do vetor Unitário a:

Resultado:

Sendo $\vec{a} = (2,-3)$, calcule (escreva com a notação matemática):

Módulo de a:

Vetor unitário a:

Módulo do vetor Unitário a:

$$\vec{a} = (2,-3)$$

$$|a| = \sqrt{13} \cong 3{,}6055$$

$$\hat{a} = \left(\frac{2}{3{,}6055}, \frac{-3}{3{,}6055}\right) = (0{,}55,-0{,}83)$$

$$|\hat{a}| = 1$$

Revisão Matemática - Vetores

- Operações Básicas:
  - Soma de Vetores

$$\vec{a} = \left[ax\ ay\ az\right]\ \vec{b} = \left[bx\ by\ bz\right]$$

$$\vec{a} = (5,3,6)$$

$$\vec{b} = (-2,-5,1)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (3,-2,7)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (5,3,6) + (2,5,-1) = (7,8,5)$$

Revisão Matemática - Vetores

- Operações Básicas:
  - Soma de Vetores

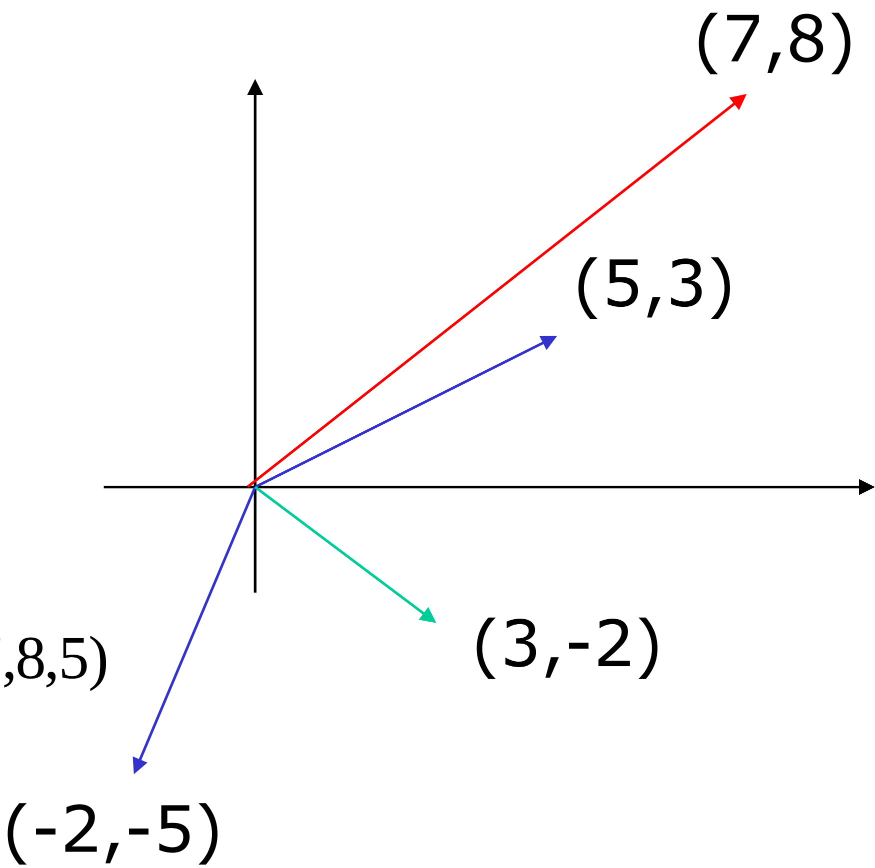
$$\vec{a} = [ax\ ay\ az]\ \vec{b} = [bx\ by\ bz]$$

$$\vec{a} = (5,3,6)$$

$$\vec{b} = (-2,-5,1)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (3,-2,7)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (5,3,6) + (2,5,-1) = (7,8,5)$$



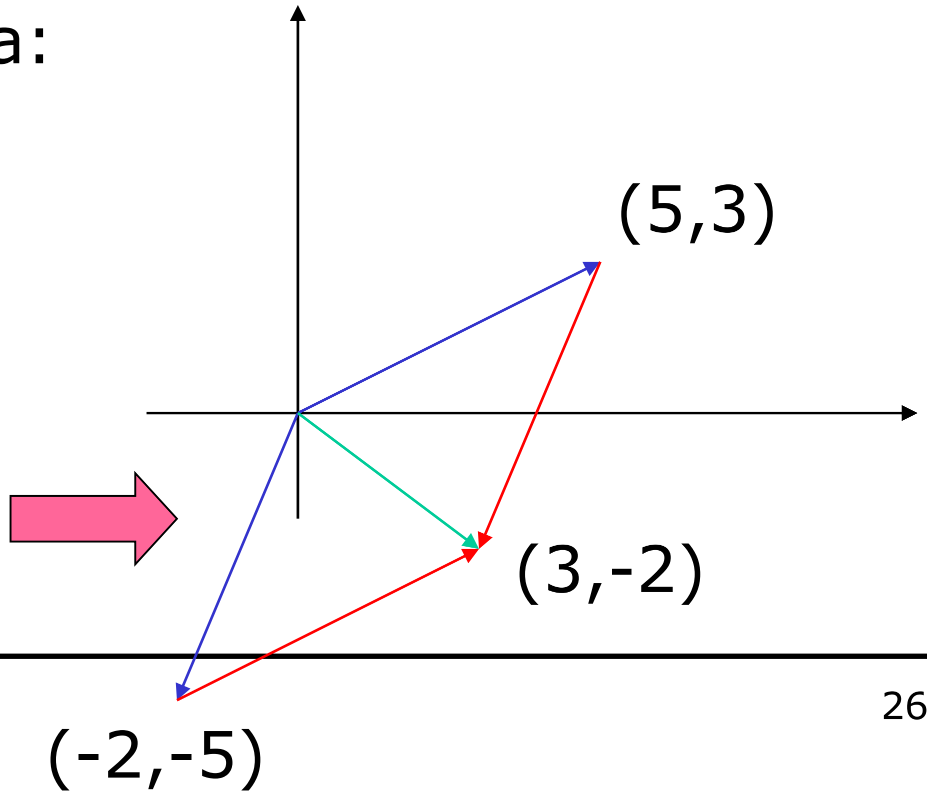
Revisão Matemática - Vetores

- Operações Básicas:
  - Soma de Vetores

Lei do paralelograma:

•Transporta paralelas

•Diagonal=Soma



Revisão Matemática - Vetores

- Operações Básicas:
  - Multiplicação por Escalar

$$\vec{a} = (2,5,6)$$

$$6.\vec{a} = (12,30,36)$$

Revisão Matemática - Vetores

- Combinação Linear
  - Utilizado para splines e representações paramétricas

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_m\vec{v}_m \text{ , onde } a_1, a_2, ..., a_m \text{ são escalares.}$$

Revisão Matemática - Vetores

- Soma de Vetores
  - Propriedades da adição: **a,b,c** (vetores) e k,l (escalares)

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \rightarrow Comutativa$$

$$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} \rightarrow Associativa$$

$$k\left(l\vec{a}\right) = kl\vec{a} \rightarrow Associativa$$

$$\left(k + l\right)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a} \rightarrow Distributiva$$

$$k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b} \rightarrow Distributiva$$

Com você outra vez...

Sejam $\vec{a} = (2,4,-3), \vec{b} = (5,-1,2),$

$\vec{c} = (0,2,-1), k = 5$ e $l = -1$, responda:

$$\vec{a} + \vec{b} =$$

$$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) =$$

$$k\left(l\vec{a}\right) =$$

$$k\vec{a} + l\vec{a} =$$

$$k\vec{a} + k\vec{b} =$$

Respostas:

Sejam $\vec{a} = (2,4,-3), \vec{b} = (5,-1,2)$,

$\vec{c} = (0,2,-1), k = 5$ e $l =$ -1, responda:

$$\vec{a} + \vec{b} = (7,3,-1)$$

$$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = (7,5,-2)$$

$$k\left(l\vec{a}\right) = (-10,-20,15)$$

$$k\vec{a} + l\vec{a} = \vec{a}(k+l) = (8,16,-12)$$

$$k\vec{a} + k\vec{b} = \vec{k}(a+b) = (35,15,-5)$$

Entre Vetores – Produto Escalar

- Produz um escalar

$$\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) \text{ e } \vec{w} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n),$$

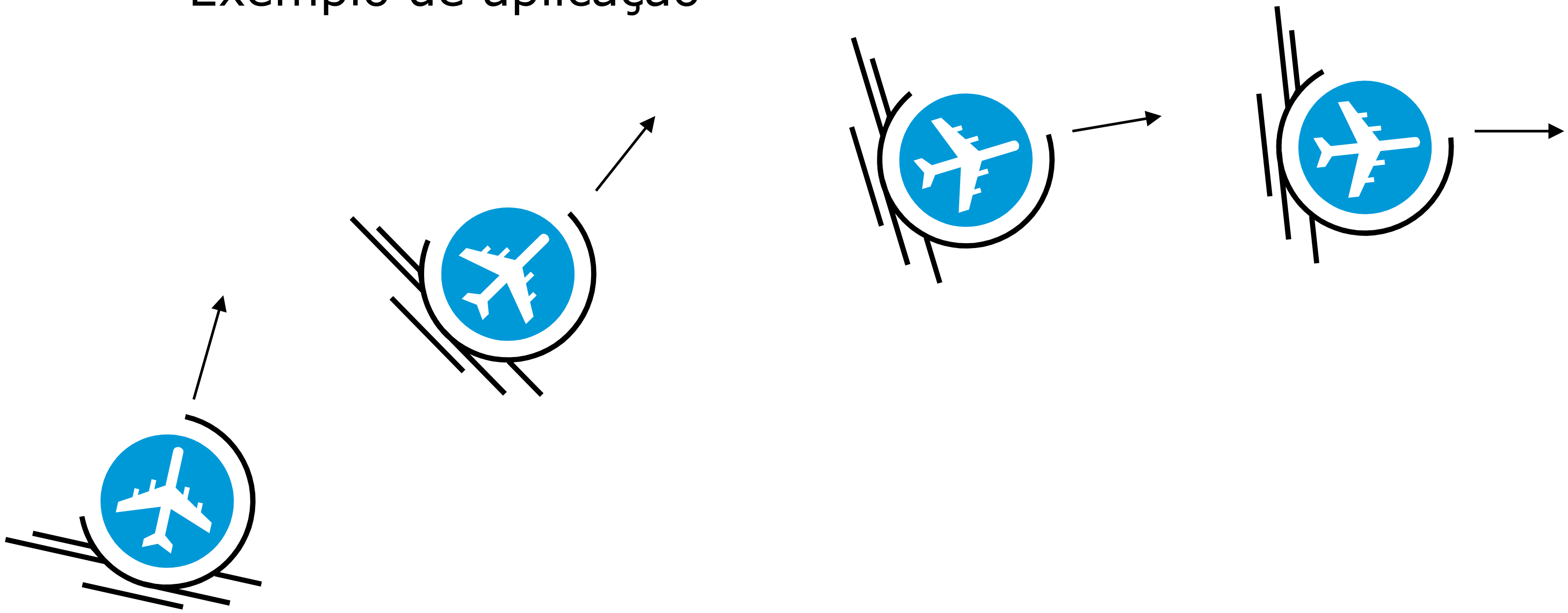
$$d = \vec{v}.\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i . \vec{w}_i$$

  - Ex: v = (2, 3, 1), w = (0, 4, -1) = 11
- Propriedades
  - Comutativa: a.b = b.a
  - Distributiva: (a+c). b= a.b +c.b
  - Associativa: (sa).b = s(a.b)
  - Produto Escalar de b com ele mesmo é o quadrado do comprimento de b

$$\left|\vec{b}\right|^2 = \vec{b}.\vec{b}$$

Revisão Matemática - Vetores

- Uma aplicação interessante é achar o cosseno do ângulo entre 2 vetores.
  - Exemplo de aplicação



Vetores – Produto Escalar

- Ângulo entre dois vetores (**b** e **c**)
  - Mais importante aplicação do produto escalar

Dedução matemática!!!

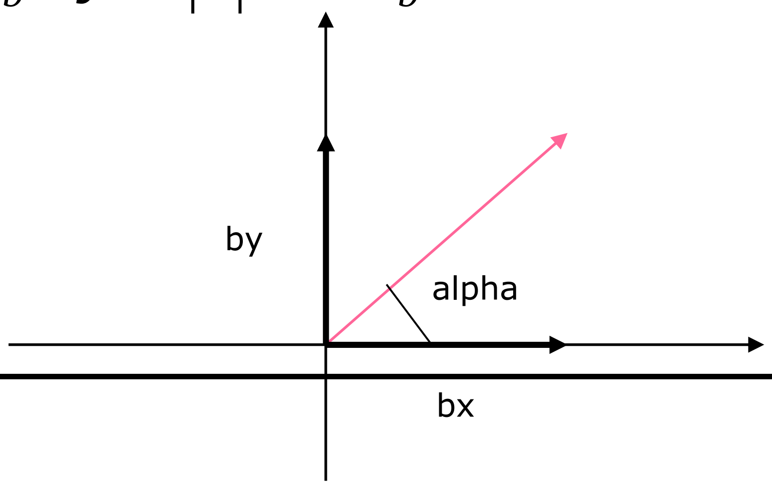
Vetores – Produto Escalar

- Ângulo entre dois vetores (**b** e **c**)
  - Mais importante aplicação do produto escalar

$$\textit{Lei do}\ \text{cosseno}:$$

$$\vec{b} = \left[bx\ by\right]$$

$$bx = \left|b\right|\cos\alpha_b\ \ by = \left|b\right|\sin\alpha_b$$



Vetores – Produto Escalar

- Ângulo entre dois vetores (**b** e **c**)
  - Mais importante aplicação do produto escalar

$$Lei\ do\ \text{cosseno}:$$

$$\vec{b} = \left[bx\ by\right]$$

$$bx = |b|\cos\alpha_b\ \ by = |b|\sin\alpha_b$$

$$\vec{b} = (|b|\cos\alpha_b, |b|\sin\alpha_b)$$

$$\vec{c} = (|c|\cos\alpha_c, |c|\sin\alpha_c)$$

$$\vec{b}.\vec{c} = |b||c|\cos\alpha_c\cos\alpha_b + |b||c|\sin\alpha_c\sin\alpha_b$$

$$\vec{b}.\vec{c} = |b||c|\left(\cos\alpha_c\cos\alpha_b + \sin\alpha_c\sin\alpha_b\right)$$

Vetores – Produto Escalar

- Ângulo entre dois vetores (**b** e **c**)
  - Mais importante aplicação do produto escalar

Lei do cosseno:

$$\vec{b} = [bx\, by]$$

$$bx = |b| \cos \alpha_b$$

$$\vec{b} = (|b| \cos \alpha_b, |b| \sin \alpha_b)$$

$$\vec{c} = (|c| \cos \alpha_c, |c| \sin \alpha_c)$$

$$\vec{b}.\vec{c} = |b||c| \cos \alpha_c \cos \alpha_b + |b||c| \sin \alpha_c \sin \alpha_b$$

$$\vec{b}.\vec{c} = |b||c| \left(\cos \alpha_c \cos \alpha_b + \sin \alpha_c \sin \alpha_b\right)$$

Como $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, temos

$$\vec{b}.\vec{c} = |b||c| \cos(\alpha_c - \alpha_b)$$

$$\vec{b}.\vec{c} = |b||c| \cos \theta \quad (\theta = \text{ângulo entre b e c})$$

$$\boxed{\cos \theta = \hat{b}.\hat{c}}$$

Vetores – Produto Escalar

- Ângulo entre dois vetores (**b** e **c**)
  - Mais importante aplicação do produto escalar

$$\mathit{Lei\ do}\ \text{cosseno}:$$

$$\vec{b} = [bx\ by\ bz]$$

$$bx = |b| \cos \alpha_b$$

$$b = (|b| \cos \alpha_b, |b| \sin \alpha_b)$$

$$c = (|c| \cos \alpha_c, |c| \sin \alpha_c)$$

$$b.c = |b||c| \cos \alpha_c \cos \alpha_b + |b||c| \sin \alpha_b \sin \alpha_b$$

$$b.c = |b||c| \left(\cos \alpha_c \cos \alpha_b + \sin \alpha_b \sin \alpha_b \right)$$

$$\text{Como } \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \text{ temos}$$

$$b.c = |b||c| \cos(\alpha_c - \alpha_b)$$

$$b.c = |b||c| \cos \theta \quad (\theta\text{-} > \text{ângulo entre b e c})$$

$$\boxed{\cos \theta = \hat{b}.\hat{c}}$$

O cosseno do ângulo entre dois vetores é o produto escalar destes vetores normalizados

Para você fazer...

- Calcule o ângulo entre os vetores:

$$b = (3,4) \ \text{e} \ c = (5,2)$$

Vetores – Produto Escalar

- Ex:

$$b = (3,4) \text{ e } c = (5,2)$$

$$|b| = 5, \ |c| = 5.385$$

$$\hat{b} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \ \hat{c} = (0.9285, 0.3714)$$

$$\hat{b}.\hat{c} = 0.85422 = \cos\theta = 31.325^{\circ} (\deg rees)$$

$$= 0{,}54(radianos)$$

- Conversão de graus em radianos e radianos em graus?

$$180\,graus = 3{,}1416\,radianos$$

Vetores – Produto Escalar

- Ex: $b = (3,4)$ e $c = (5,2)$

$$|b| = 5, \; |c| = 5.385$$

$$\hat{b} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \; \hat{c} = (0.9285, 0.3714)$$

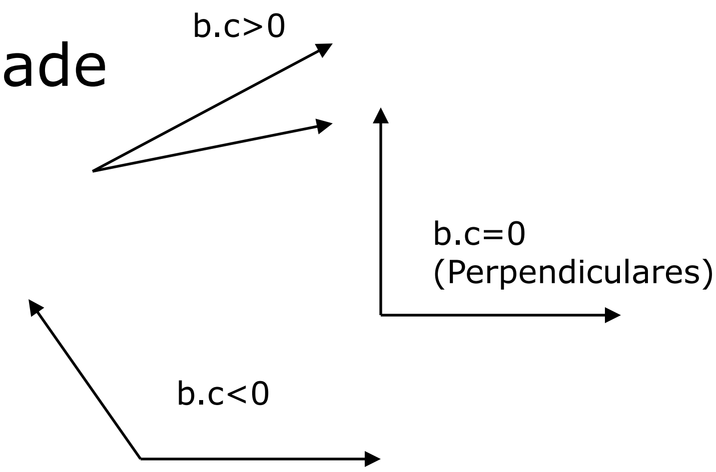
$$\hat{b}.\hat{c} = 0.85422 = \cos\theta = 31.325^\circ$$

- Sinal de b.c e Perpendicularidade

$$\cos\theta > 0 \text{ se } |\theta| < 90^\circ \rightarrow \text{b.c} > 0$$

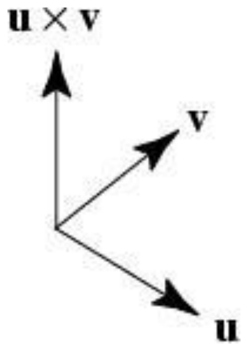
$$\cos\theta = 0 \text{ se } |\theta| = 90^\circ \rightarrow \text{b.c} = 0$$

$$\cos\theta < 0 \text{ se } |\theta| > 90^\circ \rightarrow \text{b.c} < 0$$



Vetores – Produto Vetorial

- Produz como resultado um vetor perpendicular aos dois vetores operandos
- Válido para 3D



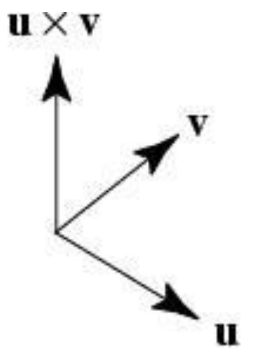
$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \ a \times b$$

$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y)i + (a_z b_x - a_x b_z)j + (a_x b_y - a_y b_x)k$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Vetores – Produto Vetorial

- Produz como resultado um vetor perpendicular aos dois vetores operandos
- Válido para 3D



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z),\quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z),\ a \times b$$

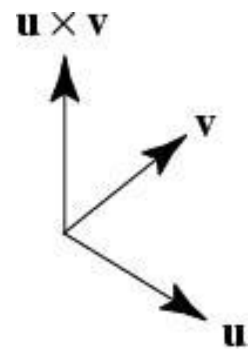
$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y)i + (a_z b_x - a_x b_z)j + (a_x b_y - a_y b_x)k$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

(aybz-azby)i

Vetores – Produto Vetorial

- Produz como resultado um vetor perpendicular aos dois vetores operandos
- Válido para 3D



$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right), \ \vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right), \ a \times b$$

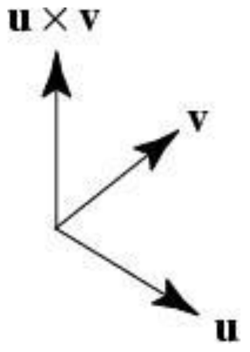
$$a \times b = \left(a_y b_z - a_z b_y\right) i + \left(a_z b_x - a_x b_z\right) j + \left(a_x b_y - a_y b_x\right) k$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

-(axbz-azbx)j
(-axbz+azbx)j
(azbx-axbz)j

Vetores – Produto Vetorial

- Produz como resultado um vetor perpendicular aos dois vetores operandos
- Válido para 3D



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z),\ \ \vec{b} = (b_x, b_y, b_z),\ a \times b$$

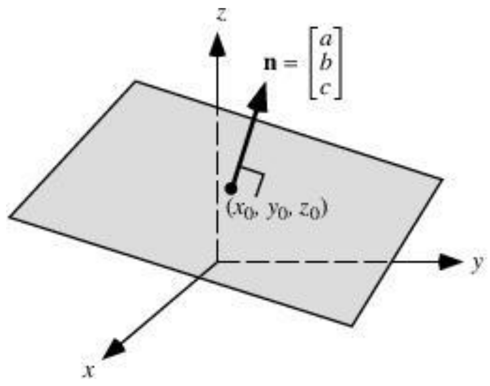
$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y)i + (a_z b_x - a_x b_z)j + (a_x b_y - a_y b_x)k$$

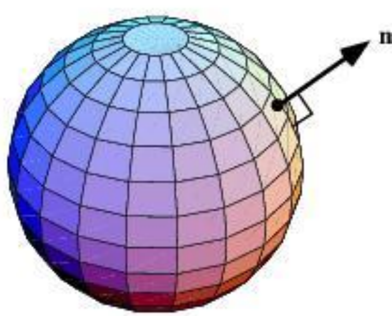
$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

(axby-aybx)k

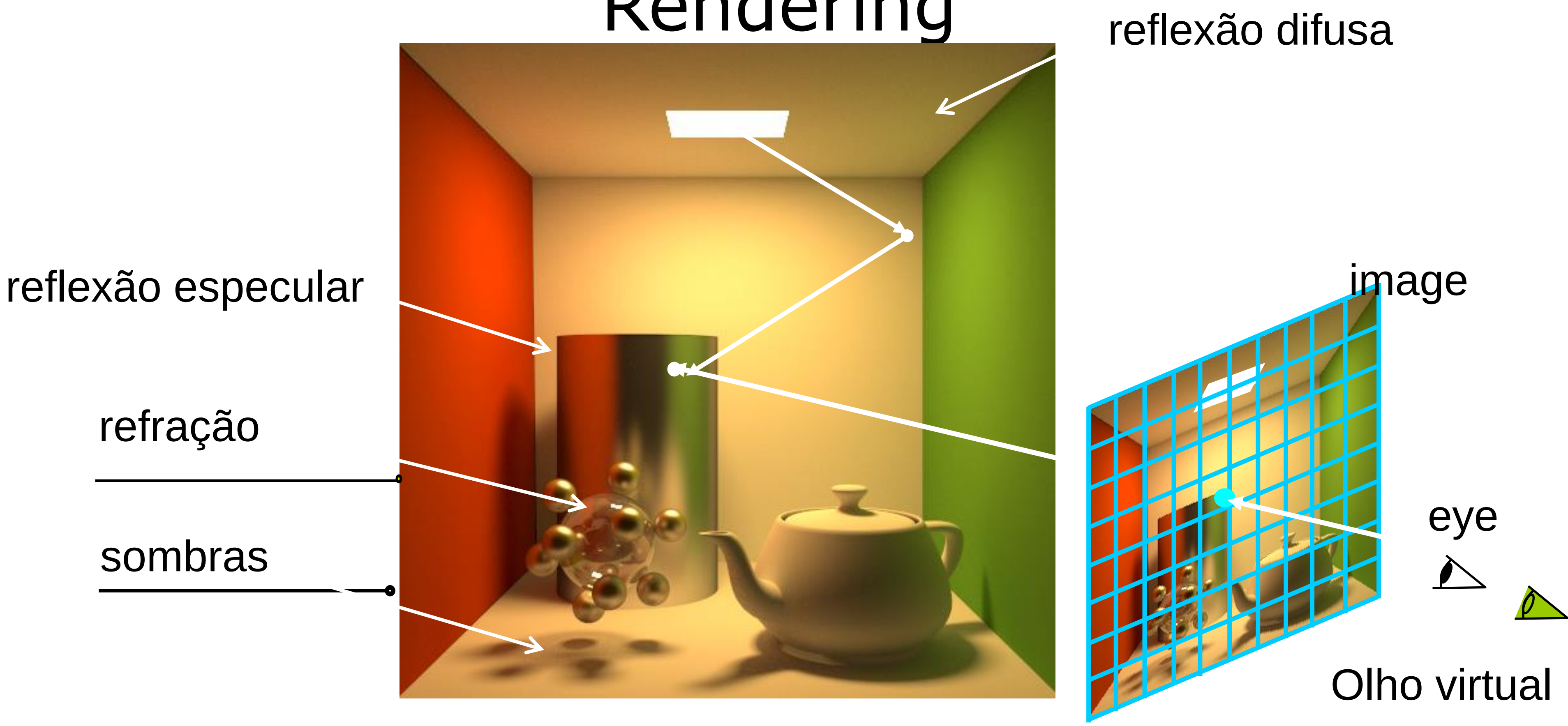
Vetores – Produto Vetorial

- Normal de um Plano
  - **Importante aplicação do produto vetorial**
  - P1, P2 e P3 sempre determinam um plano
    - a = P2 – P1
    - b = P3 – P1
  - axb = Vetor normal ao plano
  - Ordem influencia:
    - axb<>bxa





Rendering



Principais fenômenos que podem acontecer na interação entre luz e objetos

Matrizes

- Arranjo retangular de elementos
- Matriz com m linhas e n colunas é dita matriz mxn
- Matriz Quadrada: m=n
  - Exemplo (2x2, 3x3, 4x4)
- Matriz Identidade:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Vetor Linha: 1xn
- Vetor Coluna: nx1

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrizes - Operações

- Scale:
  - Multiplica cada elemento da Matriz por um fator de escala

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 8 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \\ 1 & 21 & 2 \end{pmatrix} = 4 \times 3$$

$$6A = \begin{pmatrix} 18 & 12 & -30 \\ -6 & 48 & 0 \\ 36 & 18 & 54 \\ 6 & 126 & 12 \end{pmatrix}$$

- Soma:
  - Se duas matrizes têm o mesmo número de linhas e colunas, elas podem ser somadas (mesma forma)

$$A + 6A = \begin{pmatrix} 21 & 14 & -35 \\ -7 & 56 & 0 \\ 42 & 21 & 63 \\ 7 & 147 & 14 \end{pmatrix}$$

Matrizes - Operações

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 8 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \\ 1 & 21 & 2 \end{pmatrix} = 4\times 3$$

- Matriz Transposta:
  - Troca linhas por colunas

  (útil para calcular a matriz inversa)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det B = [-1.5] - [8.2] = -21$$

$$\det B^T = [-1.5] - [2.8] = -21$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 21 \\ -5 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix} = 3\times 4$$

- Matriz Inversa:
  - $B.B^{-1}=I$

Matrizes - Operações

- Produto:
  - Definido somente se matrizes são conformes
    - Número de colunas de A(mxn) = Número de linhas de B(nxp), resultando em matrix C que será de dimensão (mxp)

$$Ex: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & -3 \\ 8 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ 11 & 13 \\ 11 & 20 \end{pmatrix}$$

  - Propriedades (A,B,C são conformes)
    - (AB)C = A(BC)
    - A(B+C) = AB+AC
    - (A+B)C = AC+BC
    - $(AB)^T = B^T A^T$

Matrizes - Operações

- Produto:
  - Definido somente se matrizes são conformes
    - Número de colunas de A(mxn) = Número de linhas de B(nxp), resultando em matrix C que será de dimensão (mxp)

$$Ex: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & -3 \\ 8 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & -14 \\ 35 & 13 \\ 11 & 20 \end{pmatrix}$$

2.6+0.-1+6.3+-3.-5=12+0+18+15=45

2.2+0.1+6.1+-3.8=4+0+6-24=-14

8.6+1.-1+-4.3+0.-5=48-1-12+0=35

8.2+1.1+-4.1+0.8=16+1-4+0=13

0.6+5.-1+7.3+1.-5=0-5+21-5=11

0.2+5.1+7.1+1.8=0+5+7+8=20

Vamos trabalhar de novo? ☺

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Resultado:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

De novo? AB=C
Calcule C

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Resultado

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 23 & 8 & 25 \end{pmatrix}$$